Deutsche JuniorAkademien

JuniorAkademie Adelsheim

16. Science Academy Baden-Württemberg 2018

Biologie

Chemie/Technik

Informatik

Mathematik

Philosophie

Fotografie

HOPP FOUNDATION for computer literacy & informatics

Regierungspräsidium Karlsruhe
Abteilung 7 – Schule und Bildung

Stiftung Bildung und Jugend

Dokumentation der JuniorAkademie Adelsheim 2018

16. Science Academy Baden-Württemberg

Veranstalter der JuniorAkademie Adelsheim 2018:
Regierungspräsidium Karlsruhe
Abteilung 7 –Schule und Bildung–
Hebelstr. 2
76133 Karlsruhe
Tel.: (0721) 926 4245
Fax.: (0721) 933 40270
www.scienceacademy.de
E-Mail: joerg.richter@scienceacademy.de
monika.jakob@scienceacademy.de
rico.lippold@scienceacademy.de

Die in dieser Dokumentation enthaltenen Texte wurden von der Kurs- und Akademieleitung sowie den Teilnehmerinnen und Teilnehmern der 16. JuniorAkademie Adelsheim 2018 erstellt. Anschließend wurde das Dokument mit Hilfe von LaTeX gesetzt.

Gesamtredaktion und Layout: Jörg Richter

Vorwort

Meine Damen und Herren, wir begrüßen Sie recht herzlich an Bord unseres Fluges mit der JuniorAkademie2k18 über Adelsheim. Wir bitten Sie jetzt, Ihre Sitzplätze einzunehmen und möglicherweise ablenkende Objekte sicher außerhalb Ihrer Reichweite zu verstauen. Wir möchten Sie nun mit der Dokumentation der Science Academy 2018 vertraut machen!

Dear Ladies and Gentlemen ... auch in diesem Sommer haben sich wieder 72 Passagiere auf dem Gelände des Landesschulzentrums für Umwelterziehung, kurz: LSZU eingefunden, um mit ihrer 30-köpfigen Crew aus Akademie-, Kurs- und KüA-Leitenden die 16. Science Academy Baden-Württemberg zu erleben.

In jedem Jahr steht die Akademie unter einem besonderen Motto. Wie unschwer zu erraten ist, drehte sich dieses Jahr alles um das Thema „Fliegen". Durch verschiedene Aktionen und Denkanstöße dazu konnten die Zeit in Adelsheim und die vielen Erlebnisse, die hier schnell einmal wie im Flug an einem vorbeirauschen, aus einer anderen Perspektive betrachtet und reflektiert werden.

In den sechs Kursen lernten die Teilnehmerinnen und Teilnehmer die Welt des wissenschaftlichen Arbeitens anhand verschiedener Themen kennen. Während die einen Tomaten gepflanzt, Schiffe versenkt oder Nachrichten verschlüsselt haben, wurden in anderen Kursen spannende Zaubertricks durchschaut, das Thema Zeit beleuchtet oder professionelle Fotos geknipst.

Neben den rein fachlichen Aspekten konnten die Teilnehmerinnen und Teilnehmer hierbei auch neue Arten zu Lernen und zu Arbeiten entdecken und Fähigkeiten wie beispielsweise ihre Präsentationstechnik verbessern.

Auch wenn alle mit unterschiedlichsten Erwartungen, Hoffnungen und Wünschen im Gepäck nach Adelsheim gereist sind, so saßen wir hier doch alle im selben Flieger und wuchsen schnell zu einer großen, bunten Gruppe zusammen. Die einzigartige Akademieatmosphäre, die entsteht, wenn so viele interessierte und motivierte Leute zusammenkommen, bringt viele spannende Gespräche, neue Interessen und häufig auch bereichernde Freundschaften mit sich.

Auch wenn unsere Wege jetzt in verschiedene Richtungen gehen werden, wünschen wir euch alles Liebe und Gute, und dass Ihr noch lange vom Akademiefieber beflügelt seid. Wir freuen uns darauf, euch wiederzusehen (vielleicht ja sogar in Adelsheim?), und jetzt bleibt nur noch zu sagen: Sie können den Sicherheitsgurt nun wieder lösen.

Wir wünschen Euch und Ihnen viel Spaß und viele schöne Einblicke in unsere Akademiezeit beim Lesen der Dokumentation!

Eure/Ihre Akademieleitung

Johanna Kroll (Assistenz)

Johanna Rettenmeier (Assistenz)

Dr. Monika Jakob

Jörg Richter

Inhaltsverzeichnis

Kurs 4: Mathematik – Magie? Keine Zauberei!

Einleitung

Lotta Bröker, Linda Gulden, Valerie Müller

Gezaubert wurde dieses Jahr im Mathematikkurs; wir dreizehn Teilnehmerinnen und Teilnehmer lernten verschiedene Zaubertricks mit mathematischem Hintergrund kennen.

Dabei erarbeiteten wir uns auch viele spannende Themen, die über die Schulmathematik hinausgehen. Die Stimmung war immer sehr gut und es wurde viel gelacht. Riffle Shuffles sowie Tricks, die auch ein wenig Fingerfertigkeit verlangen, wurden geübt. Dabei war immer das Pik Ass (unser Kurssymbol) die herbeigezauberte Karte. Wenn es dann aber ans Arbeiten ging, waren alle ruhig und konzentriert. Sobald die Kursleiter merkten, dass unsere Köpfe zu stark rauchten, legten wir eine Pause ein, in der wir Gruppenspiele wie zum Beispiel Ninja spielten. Diese trugen dazu bei, unsere Gruppengemeinschaft zu stärken.

Exkursion

Unsere kursspezifische Exkursion führte uns nach Heidelberg, in die Ausstellung „Matheliebe". Dort bekamen wir eine Führung durch verschiedene Themenbereiche der Mathematik. Diese waren sehr lebendig präsentiert. An jeder Station mit einem bestimmtem Thema waren Beispiele ausgestellt, die man aus dem Alltag kennt. Unter anderem war bei den platonischen und archimedischen Körpern ein Fußball als Beispiel für einen abgestumpften Dodekaeder und bei den Fraktalen ein Blumenkohl zu sehen. Man konnte zudem viele Aufgabenstellungen an den einzelnen Stationen ausprobieren, wie zum Beispiel die Türme von Hanoi, ein mathematisches Knobelspiel, welches auf einer alten Sage beruht.

Nach der Führung erkundeten wir in Kleingruppen die wunderbare Ausstellung noch im Detail. Am nächsten Tag sollte nämlich jede Gruppe eines der Themen aus der Ausstellung präsentieren, unter anderem die Fibonacci-Zahlen und den Goldenen Schnitt, die Zahl Pi, den Satz des Pythagoras, den Fermat-Punkt, Fraktale und die platonischen Körper. Zum Abschluss des Ausstellungsbesuches schauten wir die Dokumentation „Colors of Maths“ an. Darin wurden fünf berühmte Mathematiker vorgestellt, die uns mehr oder weniger mit einigen lustigen Szenen im Gedächtnis blieben. Die „Colors“ im Titel des Filmes bezogen sich auf fünf Sinne. Jedem Mathematiker war ein Sinn zugeordnet, welcher sich in dem Abschnitt des jeweiligen Mathematikers auch widerspiegelte.

Nach dieser unterhaltsamen Dokumentation neigte sich unser Aufenthalt in Heidelberg auch schon dem Ende zu. Zurück am Bahnhof in Adelsheim hatten wir großes Glück, denn wir erwischten die einzige Busfahrt des Tages zum Eckenberg-Gymnasium und ersparten uns damit einen langen Fußweg. Die Exkursion bereitete uns allen viel Spaß, denn sie war lehrreich, interessant und lustig. Wir haben viele neue Dinge kennengelernt und sind zudem als Gruppe noch mehr zusammengewachsen.

Sportfest

Über das Sportfest wurde uns im Vorfeld so einiges berichtet. Die einen Kursleiter sprachen von einem Zehnkilometer-Lauf, die anderen von einem Fünfkilometer-Staffellauf. In den Dokumentationen der letzten Akademien hatten wir jedoch gelesen, dass das Sportfest eher ein Gruppenspielwettbewerb ist. Diese Widersprüche ließen uns zu dem Entschluss kommen, dass die Kursleiter uns auf den Arm nahmen, was sich letztendlich auch als wahr erwies. Statt also kilometerweit zu rennen, wie angekündigt, zogen wir ein Auto den Hügel hoch, warfen Papierflieger und Teebeutel mit dem Mund. Dabei entwickelten wir unsere eigene Taktik: Wir bauten eine Pyramide, um den Teebeutel aus einer höheren Position werfen zu können. Mit dieser Taktik, unserem tollen Spruch (1, 1, 2, 3 – Mathe rennt an euch vorbei! Bube, Dame, König, Ass – Mathe macht euch alle nass!) und unseren Zauberkräften (?!) konnten wir das Sportfest für uns entscheiden und damit einen riesigen, getunten Obstkorb gewinnen.

Rotation

Es war Halbzeit bei uns in der Akademie, und wie jedes Jahr fand auch das Präsentieren unserer Kursergebnisse in Form von einer Rotation statt. Die Kurse präsentierten sich also gegenseitig ihre bisherigen Ergebnisse. Dafür hatten wir im Kurs die Themen aufgeteilt. Da unser Kurs das Thema „Zaubern mit Mathe“ im Fokus hatte, präsentierten wir unsere Zaubertricks und erklärten anschließend die Mathematik dahinter. Folgende Tricks wurden vorgeführt:

- Der 1001-Trick
- Der Binärsystem-Trick
- Der rot=schwarz-Trick
- Der 27er-Kartentrick

Nach vielen Übungsphasen war es dann so weit. Wir präsentierten die Ergebnisse den anderen Teilnehmern der Akademie und deren Kursleitern. Nach der Rotation bekamen wir noch ausführliches Feedback von unseren Kursleitern, welches sich für unsere Abschlusspräsentationen als sehr nützlich erwies.

Abschlusspräsentation

Viel zu schnell waren die zwei Wochen auch schon beinahe um und wir mussten uns auf die Abschlusspräsentation vorbereiten. Wir nahmen uns ein Beispiel an den anderen Kursen, die bei der Rotation in ihren Kursräumen Poster über ihre Themen aufgehängt hatten, und gestalteten in kleinen Gruppen Plakate zu unseren Kursinhalten. Währenddessen bereiteten wir auch die Präsentationen vor. Jeder brachte neue Ideen ein, wie man noch ein bisschen mehr Show in die Zaubertricks einbauen konnte. Die Präsentationen selbst waren ein voller Erfolg. Die ‘Mathemagik‘ unseres Kurses verzauberte die Zuschauer.

Unser Kurs

Carla In allen Lebenslagen, Carla fragen! Auch genannt: Carlapedia; das wandelnde Lexikon. Top motiviert im Kurs aber auch außerhalb, quälte sie sich schon im Morgengrauen aus dem Bett für eine kleine Joggingrunde oder ein Beachvolleyballturnier um 6:45 Uhr! Ein großes Talent bewies sie zudem bei der Theateraufführung.

Carolin Carolin war stets interessiert und arbeitete konzentriert, konnte uns aber auch so richtig zum Lachen bringen. Mit ihrer lustig-verrückten Art steckte sie uns alle an. Bei Schwierigkeiten oder Problemen gab sie nie auf und motivierte uns, es weiter zu versuchen. Während sie manchmal an den leichten Aufgaben scheiterte, waren schwierige Aufgaben für sie kein Problem.

Clemens Clemens hat unseren Kurs nicht nur durch seine Meisterschaft in Gedankenmagie weitergebracht, sondern er war immer motiviert bei der Sache, auch wenn er nicht immer alles direkt von Anfang an gecheckt hat (Achtung, Insider!). Er hat jede Aufgabe mit einem Grinsen im Gesicht bewältigt und war immer bei jedem Spaß dabei.

Danny In den Pausen war Danny mit seinem Pik Ass immer zu Späßen bereit, doch im Kurs war er voll konzentriert und entdeckte manche Leichtsinnsfehler. Im Schach blieb Danny sogar blind unschlagbar.

Jonas Jonas ist sehr wissbegierig und absolut mathebegeistert. So nimmt er an vielen Wettbewerben teil und konnte mit seinen umfassenden Mathe-Kenntnissen zum Kurs beitragen. Bei den Präsentationen hat er mit seiner angenehm ruhigen Stimme mathematisch sehr korrekt vorgetragen.

Jonathan Besonderes Können zeigte er beim Sportfest, bei dem er den Kampfgeist des Teams durch Anfeuern und gute Leistungen aufrechterhielt. Eine besondere Idee von ihm war es eine menschliche Pyramide zu bauen, um unsere Weitwurf-Ergebnisse zu verbessern, was einer der Gründe war, warum wir den ersten Platz erreichten.

Lotta Lotta war immer freundlich und hat einem jederzeit gerne geholfen. Sie war eher zurückhaltend, aber beim Theater zeigte sie herausragende Leistung und überraschte alle mit ihrem selbstbewussten Auftreten. Sie wurde immer schwach, wenn man etwas Nussschokolade für sie hatte.

Linda Linda ist sportlich, kontaktfreudig und war während der Akademie immer gut gelaunt. Bei der Kursarbeit war sie fleißig und hilfsbereit und hat immer nachgefragt, wenn es Unklarheiten gab. Sie hat in den zwei Wochen für gute Stimmung und Unterhaltung im Kurs gesorgt.

Moritz Moritz war ein sehr hilfsbereiter, motivierter und eher ruhiger Teilnehmer der Akademie. Er war talentiert im Präsentieren und hat an den beiden Präsentationstagen unsere Zaubershow durch seine Schauspielkünste sehr unterhaltsam gestaltet.

Nico Nico bereicherte unseren Kurs mit seinen hervorragenden mathematischen Kenntnissen. Es gab kaum einen Beweis oder Satz, den er noch nicht kannte – einmal abgesehen vom Fermat-Punkt. Egal wie kompliziert das Problem oder die Aufgabe war, Nico meisterte es. Einzig und allein beim Logarithmus stieß er an seine Grenzen: Diesen kannte er noch nicht einmal.

Solveig Solveig musste beim Eröffnungswochenende sicher hundertmal erklären, wie man ihren Namen richtig ausspricht. Aber sie nahm es mit Humor und blieb geduldig. Mit ihrer freundlichen Art und ihrer Neigung dazu, Leute gerne einmal auf den Arm zu nehmen, sorgte sie für gute Stimmung. Mit ihrer Altflöte und ihrer immer guten Laune unterstützte sie auch das Orchester.

Tony Tony ist sehr aufgeschlossen und hilfsbereit, zudem ist er immer motiviert etwas Neues zu erfahren. Tony kommt aus Syrien, beherrscht aber die deutsche Sprache wie ein (Pik) Ass. Er setzte sich viel für die Akademie ein, indem er zum einen die Moderation beim Bergfest übernahm und zum anderen toll durch das Programm des Hausmusikabends führte.

Valerie Valerie war jeden Morgen joggen und auch sonst fast immer in der Sport-KüA unterwegs. Auf dem Weg zu unserer Exkursion hat sie uns viel Neues und Interessantes über Boden- und Gerätturnen erzählt und als wir am Wandertag nicht mehr weiter wollten, fand sie immer noch Wege, uns zu motivieren.

Silas Unser Schülermentor Silas stand uns immer mit Rat und Tat zur Seite. Obwohl sein per Post zugeschickter Koffer etwas zu spät ankam, hatte er stets gute Laune und führte den Mathekurs beim Sportfest voller Elan zum Sieg. Jedoch mussten wegen ihm zwei Teilnehmer bis zum Dokumentationswochenende warten, um ihr Pik Ass wiederzubekommen.

Birgit Unsere super Kursleiterin Birgit hat uns jederzeit geholfen und gerne Tipps gegeben. Sie ließ uns auch gerne mal knobeln und knobelte für uns, wenn wir eine schwierige Frage hatten. So konnten wir uns sicher sein, dass wir nach der Mittagspause die Antwort auf jede noch so komplizierte Frage hatten. Ihre lockere Stimmung und ihr motiviertes Auftreten hat zu einer ganz besonderen Kursatmosphäre geführt, die für uns alle unvergesslich bleiben wird.

Maybritt Maybritt war eine grandiose Kursleiterin. Dank ihren Erklärungen verstand man sogar die komplizierteste Mathematik. Zudem war sie immer freundlich, teilte an ihrem Geburtstag ihren Kuchen mit uns und hatte immer passende, mutmachende Worte für einen, wenn man diese gerade brauchte. Für das Eröffnungswochenende reiste sie extra aus Cambridge an, wo sie gerade ein Auslandstudienjahr verbrachte.

1001-Trick

Valerie Müller

Durchführung

Der Zauberer erklärt dem Publikum: „Wählen Sie eine beliebige dreistellige Zahl. Fügen Sie diese noch einmal hinter die letzte Ziffer. Sie erhalten eine sechsstellige Zahl ($abc \to abcabc$). Ich nenne Ihnen nun eine Zahl, durch die Sie Ihre sechsstellige Zahl $abcabc$ teilen. Den Rest, der dabei entsteht, erhalten Sie in in zehnfacher Höhe in Euro bar auf die Hand.“

Beispiel:

Zahl: 579 → 579579, Divisor: 17

Rechnung:

579579 : 17 = 34092 Rest 15

In diesem Fall erhält der Zuschauer 150 Euro.

Natürlich möchte der Zauberer kein Geld ausgeben, schon gar nicht so hohe Summen! Dafür gibt es einen Weg für den Zauberer, um sicherzugehen, dass er kein Geld verliert.

Beispiel:

Zahl: 579 → 579579, Divisor: 11

Rechnung:

579579 : 11 = 52689 Rest 0

In diesem Fall erhält der Zuschauer 0 Euro.

Der gleiche Rest entsteht bei den Divisoren 7, 13, 77, 91 und 143.

Erklärung

Das „Hintereinander-Hängen“ der Zahl ist im Grunde eine Multiplikation mit 1001.

$$abc \cdot 1000 = abc000$$
$$abc \cdot 0001 = 000abc$$
$$abc \cdot 1001 = abcabc$$

Die Zahl 1001 kann in ihre Primfaktoren 7, 11, 13 zerlegt werden. Also sind alle dreistelligen Zahlen, die mit 1001 multipliziert wurden, durch diese Primzahlen und deren Produkte teilbar, sodass dabei der Rest Null entsteht.

Variante

Statt eine dreistellige Zahl zweimal hinter zu schreiben, kann man auch eine zweistellige Zahl dreimal hintereinander schreiben. Hierbei handelt es sich dann nicht mehr um eine Multiplikation mit 1001, sondern um eine Multiplikation mit 10101: $ab \to ababab$

$$ab \cdot 10000 = ab0000$$
$$ab \cdot 00100 = 00ab00$$
$$ab \cdot 00001 = 0000ab$$
$$ab \cdot 10101 = ababab$$

Damit der Rest Null ist, muss der Zauberer die Zuschauer durch 3, 7, 13, 37 oder deren Produkte teilen lassen. Dies sind die Primfaktoren von 10101.

Binärsystem

Clemens Weggenmann

Das Wort „binär“ stammt von dem Lateinischen „binius“ und bedeutet so viel wie „je zwei“. Das Binär-, Dual- oder auch Zweiersystem ist ein Stellenwertsystem. Stellenwertsysteme sind eine Art und Weise, Zahlen anzugeben. Das Binärsystem wird vor allem in der Computersprache verwendet und besteht nur aus den Ziffern 1 und 0, die dort für „an“ und „aus“ stehen. Das bekannteste Stellenwertsystem ist das Zehnersystem, also das System, mit dem wir rechnen. Das Zehnersystem besteht aus 10 unterschiedlichen Ziffern $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, daher auch der Name. Nehmen wir uns nun einmal die Beispielzahl 67358. Hier gibt die 8 die Einerstelle, die 5 die Zehnerstelle, die 3 die Hunderterstelle usw. an. So entsteht folgende Rechnung:

$$67358 = (8 \cdot 1) + (5 \cdot 10) + (3 \cdot 100) + (7 \cdot 1000) + (6 \cdot 10000)$$

Betrachtet man nun die Zahlen, mit denen die einzelnen Ziffern multipliziert werden, so lässt sich schnell Folgendes entdecken: Es handelt sich dabei um Zehnerpotenzen, also 10^0, 10^1, 10^2 usw.

67358 lässt sich also auch anders schreiben.

$$67358 = (8 \cdot 10^0) + (5 \cdot 10^1) + (3 \cdot 10^2) + (7 \cdot 10^3) + (6 \cdot 10^4)$$

Dezimal	Potenz
1	10^0
10	10^1
100	10^2
1000	10^3
10.000	10^4
100.000	10^5
1.000.000	10^6
10.000.000	10^7
100.000.000	10^8
1.000.000.000	10^9
10.000.000.000	10^{10}

Das Zweiersystem funktioniert ähnlich wie das Zehnersystem. Jedoch werden hier nur die Ziffern 0 und 1 verwendet und es wird mit Zweier-Potenzen gerechnet.

$$\begin{aligned}&(1011)_2\\ &= (1\cdot 2^0 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^3)_{10}\\ &= (1+2+0+8)_{10} = (11)_{10}\end{aligned}$$

im Zehnersystem.

2er System	Dezimalsystem
1	1
10	2
11	3
100	4
101	5
110	6
111	7
1000	8
1001	9
1010	10
1011	11
1100	12
1101	13
1110	14
1111	15
10000	16

Natürlich kann man auch im Binärsystem rechnen:

$$(101)_2 + (10)_2 = (111)_2$$

Wie im Dezimalsysem wird übertragen, doch nicht sobald 10 oder mehr erreicht wird, sondern schon bei 2 oder mehr.

$$(101)_2 + (1)_2 = (110)_2$$

Ein besonderes Beispiel dafür wäre:

$$(11111)_2 + (1)_2 = (100000)_2$$

Die allgemeine Formel dafür lautet:

$$2^0 + 2^1 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

Binärsystem-Trick

Linda Gulden, Lotta Bröker

Durchführung

Der Zauberer verteilt sieben Karten an die Personen in der ersten Reihe. Anschließend verlässt er den Raum. Ein Zuschauer nennt eine Zahl zwischen 1 und 100. Die Personen, welche die Zahl auf ihrer Karte sehen, stehen auf. Der Zauberer kommt wieder herein und nennt die Zahl des Zuschauers.

Erklärung

Die sieben Karten des Tricks sind von links nach rechts sortiert. Die stehenden Personen symbolisieren Einser, die sitzenden Nullen. Auf den Karten stehen jeweils alle Zahlen, die im Binärsystem an dieser Stelle eine Eins haben.
Auf Karte Eins: xxxxxx1
Auf Karte Zwei: xxxxx1x
usw.
Der Zauberer muss somit die entsprechenden Zweierpotenzen der stehenden Personen zusammenaddieren.

Der 27-Karten-Trick

Moritz Warmuth

Der Trick

Der Zauberer bittet einen Freiwilligen aus dem Publikum, eine Karte aus einem 27-Karten-Deck zu ziehen und sie dem Publikum (aber nicht dem Zauberer) zu zeigen. Anschließend darf der Freiwillige die Karte unter die restlichen Karten mischen. Der Zauberer fragt den Freiwilligen auch noch nach seiner Lieblingszahl n zwischen 1 und 27. Er legt dann die Karten vom verdeckten Stapel von oben nach unten in drei offene Stapel aus: erst eine Karte nach links, dann eine in die Mitte, dann eine nach rechts, dann wieder eine nach links usw., bis 3 offene Stapel aus je 9 Karten entstanden sind. Der Zuschauer muss während des Austeilens auf seine Karte achten und sagt dem Zauberer nach dem Austeilen, in welchem Stapel sich seine Karte befindet. Der Zauberer legt die drei offenen Kartenstapel wieder zu einem verdeckten zusammen. Anschließend wiederholt er diesen ganzen Prozess noch zweimal. Am Schluss legt der Zauberer n Karten vom Stapel ab, und die n-te Karte ist die Gesuchte!

Erklärung

Wenn der Zuschauer die Lieblingszahl n nennt, rechnet der Zauberer $n-1$ schnell ins 3er-System um. Da die Zahl zwischen 1 und 27 liegt, und der Zauberer vor dem Umrechnen ins 3er-System 1 von der Zahl subtrahiert, hat die Zahl im 3er-System maximal 3 Stellen. Wenn der Zauberer die Karten in 3 Stapel ausgelegt hat und weiß, in welchem sich die gesuchte Karte befindet, legt er sie anhand der ins 3er-System umgerechneten Zahl $n-1$ wie folgt zusammen:

	1er	3er	9er
Oben	0	0	0
Mitte	1	1	1
Unten	2	2	2
Austeilen	1.	2.	3.

So müssen die Stapel zusammengelegt werden

Durch dieses Zusammenlegen ist die gesuchte Karte am Ende immer die n-te Karte.

Beispiel

Lieblingszahl: 22. $22-1=21$. Im 3er-System: 210, das heißt kein 1er, ein 3er und zwei 9er. Also muss der Zauberer den Stapel, in dem die gesuchte Karte ist, nach dem ersten Austeilen auf die beiden anderen legen, nach dem zweiten zwischen die beiden anderen und nach dem dritten unter die beiden anderen. Durch dieses Zusammenlegen ist die gesuchte Karte am Ende die 22. Karte.

Siehe auch YouTube:
Beautiful Card Trick – Numberphile

Kombinatorik

Carolin Schäfer, Tony Alnasri

Die Kombinatorik beschäftigt sich mit der Anzahl von Kombinationen, die mit einer bestimmten Anzahl von Objekten möglich sind. Wir haben uns in diesem Zusammenhang mit vier Fällen beschäftigt und uns für jeden eine Formel erarbeitet. Unterschieden haben wir zwischen Vorgängen, bei denen man die Objekte mehrmals auswählen kann, und solchen, bei denen dies nicht möglich ist. Außerdem war uns die Reihenfolge, in der die Objekte ausgewählt wurden, in einem Fall wichtig und im anderen unwichtig. Wenn man diese Kriterien kombiniert, ergeben sich vier Möglichkeiten: die vier Fälle, mit denen wir uns beschäftigt haben.

1. Fall

Man besetzt k Stellen mit n Objekten, wobei **Wiederholungen erlaubt** sind und

die **Reihenfolge**, in der man die Objekte auswählt, **wichtig** ist.
Formel: n^k

Beispiele:

- Man hat ein Passwort mit vier Stellen und darf nur Großbuchstaben benutzten. Wie viele Möglichkeiten hat man für das Passwort? 4 Stellen ($k = 4$); 26 Großbuchstaben ($n = 26$)
  $$n^k = 26^4$$
- Man hat einen Fragebogen mit 10 Ja-/Nein-Fragen. Wie viele Möglichkeiten hat man den Fragebogen auszufüllen? 10 Fragen ($k = 10$); 2 Antwortmöglichkeiten ($n = 2$)
  $$n^k = 2^{10}$$
- Wie viele Möglichkeiten gibt es aus zehn Schülern eine beliebige Anzahl Schüler auszuwählen? 10 Schüler ($k = 10$); 2 Möglichkeiten einen Schüler auszuwählen oder nicht ($n = 2$)
  $$n^k = 2^{10}$$

2. Fall

Man besetzt k Stellen mit n Objekten, wobei **Wiederholungen nicht erlaubt** sind und die **Reihenfolge**, in der man die Objekte auswählt, **wichtig** ist.
Formel:

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Beispiele:

- Am Sportfest haben sechs Teams teilgenommen. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die ersten drei Plätze? 6 Teams ($n = 6$); 3 Plätze ($k = 3$)
  $$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{6!}{(6-3)!} = 6 \cdot 5 \cdot 4$$
- Man hat zehn Bücher und möchte zwei davon lesen. Wie viele Möglichkeiten hat man, wenn einem nicht egal ist, welches Buch man zuerst liest? 10 Bücher ($n = 10$); 2 ausgewählte Bücher ($k = 2$)
  $$\frac{n!}{(n-k)!} = 10 \cdot 9$$

3. Fall

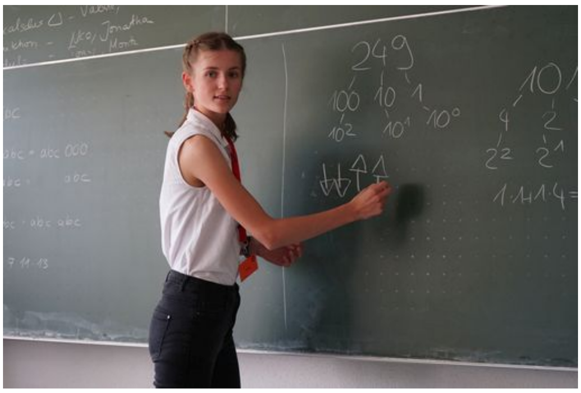
Man besetzt k Stellen mit n Objekten, wobei **Wiederholungen nicht erlaubt** sind und die **Reihenfolge**, in der man die Objekte auswählt, **unwichtig** ist.
Formel:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Anmerkung: 0! wird dabei als 1 festgesetzt.

Beispiel: Im Fernsehen werden die Lottozahlen genannt. Wie viele Möglichkeiten gibt es? 49 Zahlen ($n = 49$); 6 gezogene Zahlen ($k = 6$)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{49!}{(49-6)! \cdot 6!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6!}$$



4. Fall

Man wählt n Objekte und hat k Sorten zur Auswahl, wobei **Wiederholungen erlaubt** sind und die **Reihenfolge**, in der man die Objekte auswählt, **unwichtig** ist.
Formel:

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

Beispiel: Jörg schickt den Mathekurs Getränke einkaufen. Wir sollen fünf Flaschen kaufen und können zwischen Apfelsaft, Johannisbeersaft und Wasser wählen. Wie viele Flaschen wir jeweils kaufen, können wir selbst entscheiden, wichtig ist nur, dass wir insgesamt fünf Flaschen haben. 5 Flaschen ($n = 5$); 3 Sorten ($k = 3$)

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{5+3-1}{3-1} = \binom{7}{2}$$

Binomialkoeffizient und pascalsches Dreieck

Jonas Arndt, Tony Alnasri, Carolin Schäfer, Danny Yi

Einführung zum Binomialkoeffizienten

Der Binomialkoeffizient ist eine mathematische Funktion. Mit seiner Hilfe lässt sich eine der Grundaufgaben der Kombinatorik lösen. Er gibt an, auf wie viele verschiedene Arten man k Objekte aus einer Menge von n verschiedenen Objekten auswählen kann (ohne Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge). Der Binomialkoeffizient ist also die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge. Er wird dargestellt als $\binom{n}{k}$ (sprich„n über k“). $\binom{n}{k}$ ist eigentlich nur eine Abkürzung:

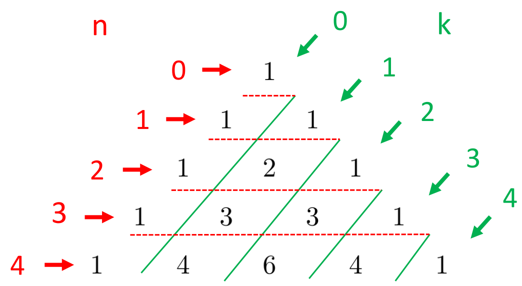
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.$$

Den Binomialkoeffizienten findet man auch im pascalschen Dreieck.

Pascalsches Dreieck

Das pascalsche Dreieck war eines der großen Themen, die wir während der Akademie behandelten. Wir begannen damit gleich am ersten Kurstag der Sommerakademie. Das pascalsche Dreieck ist eine Darstellung von verschiedenen Zahlen; dabei addieren sich zwei nebeneinanderstehende Zahlen zur darunterstehenden (siehe unten). Das pascalsche Dreieck kann daher auch als „Additionsmauer“ bezeichnet werden.

In der obersten Zeile steht nur eine 1. In jeder zusätzlichen Zeile kommt eine Zahl hinzu, sodass es in der n-ten Zeile $n+1$ Objekte gibt. Die Zahlen an den Seiten sind immer 1, da sie jeweils nur einen Summanden haben.



Pascalsches Dreieck

Es gilt nun:

1. Die Zahlen im pascalschen Dreieck stellen die Binomialkoeffizienten dar. Dabei ist die Variable n als Zeilenindex und die Variable k als Spaltenindex zu interpretieren; Die Zählung beginne bei 0.
   Das pascalsche Dreieck ist ergo wie folgt aufgebaut:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & & & \\ & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \end{array}$$

   Dies gilt aufgrund von

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

2. Es besteht eine Achsensymmetrie, denn es gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Dies wird wie folgt bewiesen:

Der Binomialkoeffizient ist definiert als

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.$$

Es wird nun $\binom{n}{k}$ zu $\binom{n}{n-k}$ umgeformt:

$$\begin{aligned}\binom{n}{n-k} &= \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-(n-k))!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-n+k)!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}.\end{aligned}$$

Man kann sich außerdem Folgendes überlegen:
In der n-elementigen Menge M existiert zu jeder k-elementigen Teilmenge ein Komplement, welches $n-k$ Elemente enthält. Somit ist die Anzahl der unterschiedlichen Teilmengen gleich.

3. Die äußeren Zahlen sind immer 1, da

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

Dies wird wie folgt bewiesen:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot (n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

und

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot (n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = 1.$$

Aufgrund einer anderen Herangehensweise ist ein weiterer Beweis möglich:
Eine Menge M enthält nur eine 0-elementige Teilmenge, sowie:
Eine n-elementige Menge M enthält nur eine n-elementige Teilmenge.

4. Die zweite bzw. zweitletzte Zahl der n-ten Reihe entspricht n wegen

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n.$$

Der Beweis dazu ist:

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1! \cdot (n-1)!} = \frac{n!}{(n-1)!} = n.$$

Nach 2. gilt nun

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1}.$$

Man kann sich außerdem Folgendes überlegen:

Eine n-elementige Menge M enthält genau n 1-elementige Teilmengen, da jedes der n Element der Menge eine 1-elementige Teilmenge darstellt. Weiterhin enthält diese Menge M genau n $(n-1)$-elementige Teilmengen, da jede $(n-1)$-elementige Teilmenge der Menge M genau ein Element der Menge M nicht enthält; dafür gibt es demnach n Möglichkeiten.

Eine nützliche Anwendungen des pascalschen Dreiecks ist es, die Werte der Binomialkoeffizienten mit niedrigem n und k zu ermitteln, da sich das pascalsche Dreieck auch ohne Berechnung der entsprechenden Binomialkoeffizienten bilden lässt (durch die Additionsmauer).

Allgemeine binomische Formeln

Wenn wir $(x+y)^n$ für verschiedene n ausmultiplizieren, merken wir, dass wir das Ganze mit dem Binomialkoeffizienten einfacher rechnen können.

Zum Beispiel gilt:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Nun schauen wir in die 2. Reihe des pascalschen Dreiecks und erkennen, dass die Koeffizienten genau die Binomialkoeffizienten sind:

$$(x+y)^2 = \binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}xy + \binom{2}{2}y^2$$

Gilt auch für $(x+y)^3$ und $(x+y)^4$:

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y^1 + \binom{3}{2}x^1y^2 + \binom{3}{3}y^3$$

$$(x+y)^4 = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3y^1 + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}x^1y^3 + \binom{4}{4}y^4$$

Und allgemein für n:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}y^3 + \ldots + \binom{n}{n-2}x^2y^{n-2} + \binom{n}{n-1}x^1y^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Carolin Schäfer, Tony Alnasri

Beim Thema Wahrscheinlichkeiten haben wir uns zunächst mit grundlegenden Rechenmöglichkeiten wie dem Baumdiagramm und den Pfadregeln, die man auch in der Schule lernt, beschäftigt. Außerdem haben wir bei komplexeren Aufgabenstellungen mit der hypergeometrischen Verteilung gerechnet.

Bei einem **Laplace-Experiment** sind alle Ergebnisse gleichwahrscheinlich. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses lässt sich dann allgemein berechnen, indem man die Möglichkeiten, welche zu dem Ereignis gehören, durch alle Möglichkeiten teilt:

$$P(\text{Ereignis}) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}$$

Baumdiagramm und Pfadregeln

Mithilfe eines Baumdiagramms lässt sich der mögliche Ablauf eines mehrstufigen Zufallsexperiments mit endlich vielen möglichen Ergebnissen darstellen und analysieren. Zudem ist es damit möglich, auf Grundlage der ersten und zweiten Pfadregel die Wahrscheinlichkeiten für zusammengesetzte Ereignisse eines solchen Experiments in einfacher Weise zu berechnen.

Erste Pfadregel (Produktregel)

Bei einem mehrstufigen Zufallsexperiment ist die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses gleich seiner Pfadwahrscheinlichkeit, d. h. gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades, der dem zugehörigen Ergebnis im Baumdiagramm führt.
Beispiel: 3-maliges Würfeln

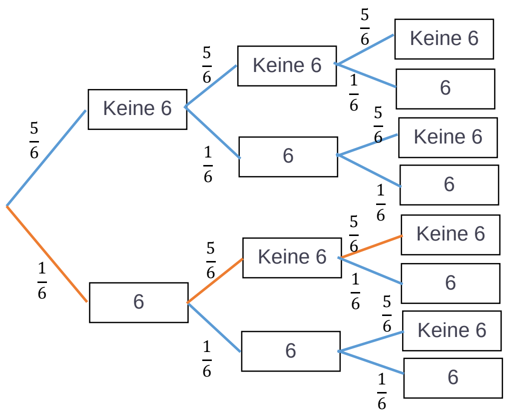


Abbildung zur ersten Pfadregel

$$P(6;\text{ keine }6;\text{ keine }6) = \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{25}{216} \approx 0{,}1157 = 11{,}57\,\%$$

Zweite Pfadregel (Summenregel)

Bei einem mehrstufigen Zufallsexperiment ist die Wahrscheinlichkeit eines (zusammengesetzten) Ereignisses gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Pfade, die zu seinen zugehörigen Ergebnissen führen.
Beispiel: 3-maliges Würfeln

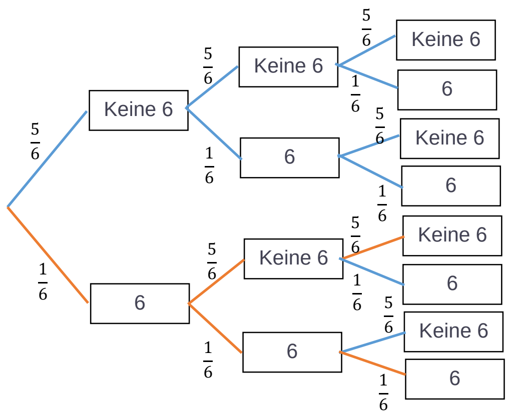


Abbildung zur zweiten Pfadregel

$$P(\text{dreimal 6 oder (6; keine 6; keine 6)}) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{25}{216}=\frac{26}{216} \approx 0,1204 = 12,04\,\%$$

Hypergeometrische Verteilung

Die hypergeometrische Verteilung kann man anwenden, wenn man n Objekte hat, von denen n_1 Objekte eine bestimmte Eigenschaft haben, die die restlichen n_2 Objekte nicht haben. Jetzt wählt man aus den n Objekten k Objekte ohne Wiederholung aus, von denen k_1 Objekte die Eigenschaft haben sollen und k_2 Objekte nicht. Die Reihenfolge, in der man die Objekte auswählt, ist unwichtig. Um die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis zu berechnen, benötigt man folgende Formel, die hypergeometrische Verteilung:

$$P = \frac{\binom{n_1}{k_1}\cdot\binom{n_2}{k_2}}{\binom{n}{k}}$$

Beispiel 1: In einer Urne befinden sich 8 rote und 7 weiße Kugeln. Ohne Zurücklegen werden vier Kugeln gezogen, wobei die Reihenfolge unwichtig ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit P, dass man aus der Urne drei rote und eine weiße Kugel zieht?

8 rote Kugeln ($n_1 = 8$); 7 weiße Kugeln ($n_2 = 7$); insgesamt 15 Kugeln ($n = 15$); 4 gezogene Kugeln ($k = 4$); 3 rote, gezogene Kugeln ($k_1 = 3$); 1 weiße, gezogene Kugel ($k_2 = 1$)

$$P = \frac{\binom{n_1}{k_1}\cdot\binom{n_2}{k_2}}{\binom{n}{k}} = \frac{\binom{8}{3}\cdot\binom{7}{1}}{\binom{15}{4}} \approx 0,29 = 29\,\%$$

Beispiel 2: Dies kann man beliebig erweitern. In einer Urne befinden sich 3 grüne, 6 blaue und 5 gelbe Kugeln. Man zieht 8 Kugeln ohne Zurücklegen und ohne die Reihenfolge zu beachten. Wie wahrscheinlich ist es, dass man 2 grüne, 2 blaue und 4 gelbe Kugeln zieht? 3 grüne Kugeln ($n_1 = 3$); 6 blaue Kugeln ($n_2 = 6$); 5 gelbe Kugeln ($n_3 = 5$); insgesamt 14 Kugeln ($n = 14$); 8 gezogene Kugeln ($k = 8$); 2 grüne, gezogene Kugeln ($k_1 = 2$); 2 blaue, gezogene Kugeln ($k_2 = 2$); 4 gelbe, gezogene Kugeln ($k_3 = 4$)

$$P = \frac{\binom{n_1}{k_1}\cdot\binom{n_2}{k_2}\cdot\binom{n_3}{k_3}}{\binom{n}{k}} = \frac{\binom{3}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{5}{4}}{\binom{14}{8}} \approx 0,075 = 7,5\,\%$$

Geburtstagsproblem

Das Geburtstagsproblem hat, wie der Name schon sagt, mit Geburtstagen zu tun. Es geht darum, die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass mindestens 2 aus n zufällig ausgewählten Menschen am gleichen Tag Geburtstag haben. Lösung: Wir demonstrieren die Rechnung für eine Gruppe von 25 Personen ($n = 25$). Wir bestimmen zuerst die Gegenwahrscheinlichkeit, dass das Ereignis (2 aus 25 Personen haben am gleichen Tag Geburtstag) nicht eintrifft. Die erste Person hat 365 Tage zur Auswahl, um Geburtstag zu haben. Der zweiten Person bleiben jetzt nur noch 364 Tage, um Geburtstag zu haben, weil wir ja nicht wollen, dass zwei Personen am gleichen Tag Geburtstag haben. Der dritten Person bleiben jetzt noch 363 Tage, um Geburtstag zu haben, weil wir ja wollen, dass auch die dritte Person an einem Tag alleine Geburtstag hat. usw. Die 25. Person hat nur noch 341 Tage frei, um Geburtstag zu haben.

$$P = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{342}{365} \cdot \frac{341}{365} \approx 0,4313 = 43,13\,\%$$

Dies ist die Wahrscheinlichkeit, dass 25 Personen an verschiedenen Tagen Geburtstag haben. Die beiden Wahrscheinlichkeiten, dass alle an verschiedenen Tagen Geburtstag haben, und dass mindestens zwei am gleichen Tag Geburtstag haben, müssen addiert 100 % ergeben. Wir ziehen davon die unerwünschten Fälle (alle an verschiedenen Tagen) ab.

$$1 - 0,4313 = 0,5687 = 56,87\,\%$$

Das ist jetzt die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 2 aus 25 Personen am gleichen Tag Geburtstag haben. So einen hohen Wert erwarten die wenigsten. Daran sieht man, dass es sich lohnen kann, Wahrscheinlichkeiten zu berechnen, weil der erste Schein oft trügt.

Vollständige Induktion

Nico Horsak

Die vollständige Induktion ist eine Beweismethode aus der Mathematik, mithilfe derer man Aussagen über alle natürlichen Zahlen beweisen kann. Die Idee besteht darin, dass man die Aussage für einen Sonderfall, die kleinste Zahl, beweist und durch die Annahme, dass sie für n Elemente gilt, beweist, dass sie auch für $n+1$ Elemente gilt. Diese Beweistechnik haben wir uns zusammen im Kurs erarbeitet und an vielen Beispielen aus der Mathematik angewandt, zum Beispiel an der gaußschen Summenformel, die wir hier auch beweisen wollen. Außerdem haben wir mit ihrer Hilfe auch den „Gilbreath“-Zaubertrick bewiesen.

Die gaußsche Summenformel besagt: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Zuerst kommt der **Induktionsanfang**, bei dem die Aussage für die kleinste Zahl gezeigt wird:

Induktionsanfang: $n = 1$

$$1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$$

Als Nächstes kommt der **Induktionsschritt**, welcher aus drei Teilen besteht:

- **Induktionsannahme**. Bei dieser wird die Aussage für ein n als gültig angenommen. Das ist möglich, weil nach Induktionsanfang gezeigt wurde, dass sie für ein n gilt:

  Induktionsannahme:

  $$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Nun kommt die **Induktionsbehauptung**. Es wird behauptet, dass die Aussage dadurch, dass sie für n gilt, auch für $n+1$ gilt.
  Induktionsbehauptung:

  $$1 + \ldots + n + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

- Die Induktionsbehauptung wird nun durch Umformung und unter Verwendung der Induktionsannahme bewiesen.
  Beweis:

  $$\begin{aligned} 1 + \ldots + n + n + 1 &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 &= \frac{n^2 + 3n + 2}{2} \\ \Leftrightarrow n(n+1) + 2n + 2 &= n^2 + 3n + 2 \\ \Leftrightarrow n^2 + 3n + 2 &= n^2 + 3n + 2 \end{aligned}$$

Da nun nach Umformungen gezeigt wurde, dass die Gleichung, da sie für n stimmt, auch für

$n+1$ stimmt, ist sie für alle n bewiesen, denn nun kann $n+1$ einfach als n angesehen werden, was beweist, dass die Formel auch für das nächsthöhere n gilt. Das kann man sich wie einen Dominoeffekt vorstellen.

Gilbreath Trick

Solveig Dengler

Der Trick

Vorbereitung: Bereite einen Stapel mit n roten und n schwarzen Karten vor, die abwechselnd liegen.

Durchführung: Der Zauberer zählt nun die Karten von oben von dem Stapel einzeln herunter und der Zuschauer sagt ungefähr bei der Hälfte „Stopp“. So entstehen zwei Stapel. Nun macht der Zuschauer einen Riffle Shuffle mit diesen beiden Stapeln und der Zauberer legt ein Tuch über den entstandenen Kartenstapel. Der Zauberer zaubert nun immer eine schwarze und eine rote Karte hervor.

Begründung

Aussage

Es liegen immer eine rote und eine schwarze Karte paarweise zusammen. So sind die erste und die zweite Karte, sowie die dritte und die vierte Karte usw. immer ein rot-schwarzes Paar. (Hierbei ist jedoch noch nicht klar, welche Karte rot und welche Karte schwarz ist.)

Beweis (durch Induktion nach n)

Induktionsanfang: $n = 1$: Aussage wahr (Wenn wir eine rote und eine schwarze Karte haben, so müssen die rote und die schwarze Karte als Paar zusammen liegen.)
Induktionsschritt: $n \Rightarrow n+1$
Induktionsannahme: Die Aussage gilt für n.
Induktionsbehauptung: Die Aussage gilt für $n+1$.

Beweis: Nimm einen Stapel mit $2(n+1)$ Karten (rot/schwarz abwechselnd) und bilde zwei Stapel wie oben. Die Farben der untersten beiden Karten sind verschieden, da zu Beginn die oberste und unterste Karte des Stapels verschiedene Farben hatten und die ehemals oberste Karte durch das Herunterzählen (vor dem Stopp-Sagen) jetzt die untere des zweiten Stapels ist.

Wir nehmen an, dass die rechte untere Karte rot ist. Wo ist sie nach dem Riffle Shuffle?

Fall 1: Die rote Karte liegt ganz unten. Über ihr liegt die schwarze des rechten oder die unterste (schwarze!) des linken Stapels.
$\Rightarrow$ Die beiden unteren Karten des neuen Stapels bilden ein rot-schwarzes Pärchen.

Fall 2: Sie liegt als zweite Karte von unten. Unter ihr muss also die schwarze Karte des linken Stapels liegen.
$\Rightarrow$ Die unteren Karten bilden ein rot-schwarzes Pärchen.

Fall 3: Sie liegt mindestens als dritte von unten.
$\Rightarrow$ Die untersten Karten des neuen Stapels sind die untersten Karten des linken Teilstapels, also ein Pärchen aus Schwarz und Rot.

Entfernen wir nun das unterste Pärchen, liegt darüber ein Stapel aus $2n$ Karten, die durch Abzählen und Riffle Shuffle aus $2n$ abwechselnd gelegten Karten entstanden sind. Nach Induktionsannahme sind dies n rot-schwarze Pärchen.

Varianten

Statt den Stapel zu Beginn nur nach Schwarz-Rot zu sortieren, ist es auch möglich, ihn auch nach allen vier verschiedenen Farben zu sortieren (immer gleiche Reihenfolge!). Dann haben immer vier Karten, die zusammen liegen, alle vier verschiedenen Farben. So kann man auch nach Werten sortieren und sieben verschiedene Werte immer in derselben Reihenfolge anordnen. Somit haben sieben übereinander liegende Karten immer sieben verschiedene Werte.

Modulo-Rechnung

Carla Baer, Jonathan Notter

Eines unserer Kursthemen war die Modulo-Rechnung, welche nicht nur bei uns, sondern auch bei den Informatikern von Bedeutung war. Zuerst haben wir uns das Grundprinzip klar gemacht und anschließend diverse Rechenregeln kennengelernt und diese bewiesen. All das war nötig, um anschließend mit Hilfe dieser Rechenmethode einige unserer Tricks (wie z. B. den Unmöglich-Trick) verstehen und erklären zu können.

Das Rechnen mit Modulo ist eigentlich nichts anderes als das Rechnen mit Rest. Und das machen wir jeden Tag: Wollen wir zum Beispiel 22 Uhr plus 8 Stunden rechnen, so lautet unsere Antwort nicht 30 Uhr, sondern 6 Uhr. Wir teilen also durch 24 und betrachten nur den Rest (in diesem Beispiel 6) als Ergebnis. Beim Modulo-Rechnen ist also nur der Rest entscheidend, den eine Zahl beim Teilen durch n (im Beispiel war $n = 24$) lässt.

Allgemein gilt: Wenn zwei Zahlen a, b beim Teilen durch n den gleichen Rest lassen, sind sie **kongruent modulo** n. Dafür schreibt man:

$$a \equiv b \pmod{n}$$

Um Aufgaben zur Modulo-Rechnung lösen zu können, mussten wir uns zuerst die bereits erwähnten Rechengesetze aneignen. Hier ein kleiner Auszug dieser Gesetze:

Haben wir beispielsweise zwei Gleichungen mit demselben Modulus (das heißt, sie werden beide durch die gleiche Zahl geteilt), so lassen sich diese beiden addieren bzw. subtrahieren:

Man nehme die beiden Gleichungen $a \equiv b$ und $c \equiv d$ (modulo n, für ein $n \in \mathbb{N}$). Dann gilt: $a + c \equiv b + d$ sowie $a - c \equiv b - d$. Dasselbe gilt auch für die Multiplikation: $a \cdot c \equiv b \cdot d$.

Für die Modulo-Rechnung gibt es viele interessante Anwendungen. Hier ein Beispiel:

Was ist $2^{2018} \pmod{5}$? Betrachtet man $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \ldots$, erkennt man eine bestimmte Reihenfolge:

$$\begin{aligned} 2^0 &\equiv 1 \pmod{5} \\ 2^1 &\equiv 2 \pmod{5} \\ 2^2 &\equiv 4 \pmod{5} \\ 2^3 &\equiv 3 \pmod{5} \\ 2^4 &\equiv 1 \pmod{5} \\ &\ldots \end{aligned}$$

Es wiederholt sich also die Folge: 1,2,4,3, ...

Betrachtet man die Exponenten, kann man diese Regel aufstellen:

$$2^x \equiv \begin{cases} 1 \pmod{5} & \text{falls } x \equiv 0 \pmod{4} \\ 2 \pmod{5} & \text{falls } x \equiv 1 \pmod{4} \\ 4 \pmod{5} & \text{falls } x \equiv 2 \pmod{4} \\ 3 \pmod{5} & \text{falls } x \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

Nun zurück zur Anfangsaufgabe: Was ist $2^{2018} \pmod{5}$?

Wegen $2018 \equiv 2 \pmod{4}$ ist laut unserer Regel

$$2^{2018} \equiv 4 \pmod{5}$$

Schubfachprinzip

Solveig Dengler

Das Schubfachprinzip ist ein mathematisches Prinzip. Es besagt: Wenn m Objekte in n Kategorien aufgeteilt werden und $m > n$ ist, dann muss es mindestens eine Kategorie geben, die mindestens zwei Objekte enthält.

Beispiel: Ich habe drei T-Shirts und zwei Schubladen, so müssen sich in einer der beiden Schubladen mindestens zwei T-Shirts befinden.

Beweisen mit dem Schubfachprinzip

Beim Beweisen mit dem Schubfachprinzip muss man zuerst die Kategorien und die Objekte definieren und dann diese zum Beweisen nutzen.

Beispiel 1: Gegeben seien eine Gerade und ein Dreieck ABC. Die Gerade geht durch keinen Punkt des Dreiecks. Zeige, dass die Gerade nicht alle Seiten des Dreiecks schneidet.

Kategorien: die beiden Flächen auf der rechten und der linken Seite der Gerade
Objekte: drei Ecken des Dreiecks
$\Rightarrow$ Zwei Ecken des Dreiecks liegen in einer Fläche rechts oder links neben der Gerade, da die Anzahl der Objekte größer ist als die der Kategorien. Somit kann die Gerade die Seite zwischen diesen Ecken nicht schneiden.

Beispiel 2: Wir betrachten die Zahlen $1, 2, \ldots, 2n$ und nehmen eine beliebige $(n + 1)$-elementige Teilmenge davon. In dieser Teilmenge gibt es dann immer zwei Zahlen, die keinen gemeinsamen Teiler haben.

Objekte: $n + 1$ Zahlen in der Teilmenge
Kategorien: 1 und 2, 3 und 4, 5 und 6, $\ldots$ $2n-1$ und $2n$ (immer 2 aufeinander folgende Zahlen ergeben eine Kategorie, also n Kategorien)
$\Rightarrow$ Es muss zwei aufeinanderfolgende Zahlen in der Teilmenge geben, da es $n + 1$ Objekte und nur n Kategorien gibt und somit zwei Objekte in einer Kategorie sind, was bedeutet, dass sie aufeinanderfolgend sind. Aufeinanderfolgende Zahlen haben keinen gemeinsamen Teiler und somit gibt es immer zwei Zahlen, die keinen gemeinsamen Teiler haben.

Unmöglich-Trick

Jonathan Notter, Carla Baer

Den krönenden Abschluss unserer Präsentation bildete der „Unmöglich“-Trick. Bereits in unserem Programmheft groß angekündigt, warteten wir gespannt auf die Erklärung dieses beeindruckenden Kunststückes. Mit Hilfe von vier zufällig ausgewählten Karten eine fünfte so zu verschlüsseln, dass der Zauberer die gesuchte Karte nennen kann, ist das Magie? Nein, Mathematik! Nachdem wir uns die mathematischen Grundlagen der Modulo-Rechnung, Kombinatorik und des Schubfachprinzips angeeignet hatten, konnten wir uns endlich dem Trick zuwenden:

Durchführung

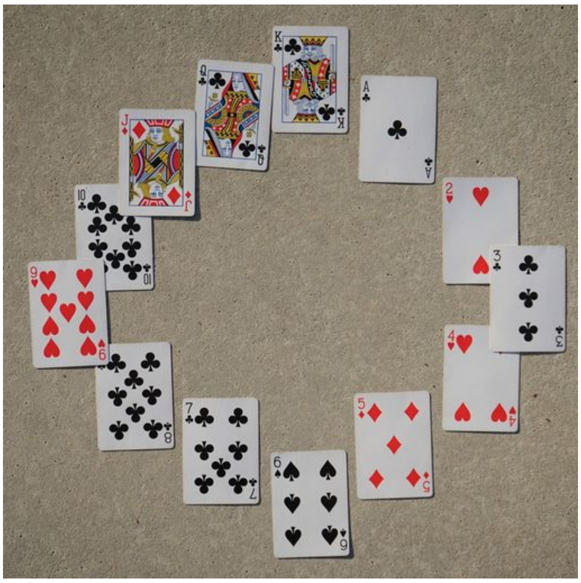
Vorzubereiten ist nicht wirklich viel, lediglich eine gute Absprache zwischen Zauberer und Assistent, sowie die allgegenwärtig bekannte Übung ist von Bedeutung. Hier heißt es wie so oft „Übung macht den Meister“. Die eigentliche Durchführung vor dem Publikum beginnt damit, dass ein Zuschauer fünf beliebige Karten aus dem 52-Blatt-Deck wählt. Aus diesen wählt der Assistent vier aus, die er offen auf den Tisch legt, um so die fünfte Karte dem Zauberer zu verschlüsseln. Die übrige Karte zeigt er dem Publikum und legt sie zur Seite. Nun werden die vier anderen Karten dem Zauberer gezeigt und dieser nennt die fehlende Karte. Atemberaubend!

Auflösung

Laut Schubfachprinzip muss es bei den fünf Karten immer mindestens zwei der gleichen Farbe (Herz, Karo, Pik, Kreuz) geben. Aus diesen beiden wählt der Assistent, die zu verschlüsselnde Karte nach folgendem Prinzip aus:

Markiert man auf einer gewöhnlichen Uhr zwei Uhrzeiten, so sind diese höchstens 6 Stunden auseinander. (Bsp. 2 und 9 sind markiert → 2 ist fünf Stunden später als 9).

Betrachtet man die Kartenuhr, sieht man, dass zwei Karten in einer Richtung im Uhrzeigersinn maximal einen Abstand von sechs Karten haben können.



Kartenuhr

Nun wählt man die Karte der beiden (mit gleicher Farbe), von der aus sich die andere Karte innerhalb der sechs-Schritte-Reichweite im Uhrzeigersinn befindet. Diese Karte ist die erste, die der Assistent auslegt. Mit Hilfe der verbleibenden drei Karten verschlüsselt der Assistent die Anzahl der Schritte, die der Zauberer von der ersten ausgelegten Karte zählen muss.

Der Zauberer und Assistent kennen den Wert der einzelnen Karten und können somit die Karten der Größe nach sortieren. Die Reihenfolge der Kartenwerte ist im Diagramm gezeigt.

Reihenfolge der Kartenwerte

Mit diesem Wissen wandelt der Assistent die Kartenwerte in eine Zahl um: Es gibt sechs Möglichkeiten für die Reihenfolge der verbleibenden drei Karten (zum Beispiel klein-mittel-groß, klein-groß-mittel usw.). Jede dieser Möglichkeiten kodiert nun eine Schrittweite wie in der Tabelle dargestellt.

1. Karte	2. Karte	3. Karte	Wert
K	M	G	1
K	G	M	2
M	K	G	3
M	G	K	4
G	K	M	5
G	M	K	6

Umwandlung der Kartenwerte in eine Zahl; K steht für die Karte mit dem kleinsten Wert, M mittleren, G für den größten

Dies ist die Anzahl der Schritte, die der Zauberer von der ersten Karte auf der Kartenuhr weitergehen muss, um bei der gesuchten Karte zu landen. Wie oben erklärt reichen sechs Schritte immer aus. Die Farbe ist ja bereits bekannt, also kennt der Zauberer nun die fünfte Karte.

Insgesamt ein verblüffender und spannender Trick, hinter dem sehr viel Mathematik steckt. Man kann also sagen:

Mathemagie, keine Zauberei!

Danksagung

Wir möchten uns an dieser Stelle bei denjenigen herzlich bedanken, die die 16. JuniorAkademie Adelsheim / Science Academy Baden-Württemberg überhaupt möglich gemacht haben.

Finanziell wurde die Akademie in erster Linie durch die Stiftung Bildung und Jugend, die Hopp-Foundation, den Förderverein der Science Academy sowie durch den Fonds der Chemischen Industrie unterstützt. Dafür möchten wir an dieser Stelle allen Unterstützern ganz herzlich danken.

Die Science Academy Baden-Württemberg ist ein Projekt des Regierungspräsidiums Karlsruhe, das im Auftrag des Ministeriums für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg und mit Unterstützung der Bildung & Begabung gGmbH Bonn für Jugendliche aus dem ganzen Bundesland realisiert wird. Wir danken daher Frau Anja Bauer, Abteilungspräsidentin der Abteilung 7 – Schule und Bildung des Regierungspräsidiums Karlsruhe, der Leiterin des Referats 75 – allgemein bildende Gymnasien, Frau Leitende Regierungsschuldirektorin Dagmar Ruder-Aichelin, Herrn Jan Wohlgemuth vom Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg sowie dem Koordinator der Deutschen Schüler- und JuniorAkademien in Bonn, Herrn Volker Brandt, mit seinem Team.

Wie in jedem Jahr fanden die etwas über einhundert Gäste sowohl während des Eröffnungswochenendes und des Dokumentationswochenendes als auch während der zwei Wochen im Sommer eine liebevolle Rundumversorgung am Eckenberg-Gymnasium mit dem Landesschulzentrum für Umwelterziehung (LSZU) in Adelsheim. Stellvertretend für alle Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter möchten wir uns für die Mühen, den freundlichen Empfang und den offenen Umgang mit allen bei Herrn Oberstudiendirektor Meinolf Stendebach, dem Schulleiter des Eckenberg-Gymnasiums, besonders bedanken.

Ein herzliches Dankeschön geht auch an Frau Oberstudiendirektorin Dr. Andrea Merger vom Hölderlin-Gymnasium in Heidelberg, wo wir bei vielfältiger Gelegenheit zu Gast sein durften.

Zuletzt sind aber auch die Kurs- und KüA-Leiter gemeinsam mit den Schülermentoren und der Assistenz des Leitungsteams diejenigen, die mit ihrer hingebungsvollen Arbeit das Fundament der Akademie bilden.

Diejenigen aber, die die Akademie in jedem Jahr einzigartig werden lassen und die sie zum Leben erwecken, sind die Teilnehmerinnen und Teilnehmer. Deshalb möchten wir uns bei ihnen und ihren Eltern für ihr Engagement und Vertrauen ganz herzlich bedanken.

Bildnachweis

Seite 30, Abbildung Gasgenerator:
kfztech.de (mit freundlicher Genehmigung)

Seite 101, Abbildung 1:
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:E-30-Cutmodel.jpg
Wikimedia-User: Hanabi123, Bearbeitungen: Mika Alkabetz
CC BY-SA 3.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/legalcode)

Seite 103, Abbildung 5:
https://commons.wiki media.org/wiki/File:Shutter_priority_mode.svg
Wikimedia-User: Athepan, Bearbeitungen: Mehdi
CC BY-SA 2.5 (https://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.5/legalcode)

Seite 108, Abbildung 12:
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:CMY_ideal_version_rotated.svg
Gemeinfrei
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Synthese+.svg
Wikimedia-User: Quark67
CC BY-SA 3.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/legalcode)

Seite 109, Abbildung 13:
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:HSV_cone.png
Wikimedia-User: (3ucky(3all
CC BY-SA 3.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/legalcode)

Seite 114, Abbildung 23:
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hexacyanidoferrat(II).svg
Wikimedia-User: Ilgom und Muskid
Gemeinfrei

Alle anderen Abbildungen sind entweder gemeinfrei oder eigene Werke.