

JuniorAkademie Adelsheim

21. SCIENCE ACADEMY BADEN-WÜRTTEMBERG 2024



Astronomie



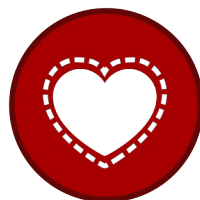
Literatur/Philosophie



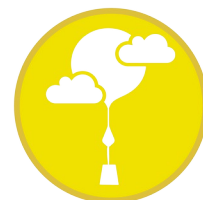
Mathematik/Informatik



Mathematik/Physik



Medizin



Meteorologie/Physik

Regierungspräsidium Karlsruhe Abteilung 7 – Schule und Bildung

**Dokumentation der
JuniorAkademie Adelsheim 2024**

**21. Science Academy
Baden-Württemberg**

Veranstalter der JuniorAkademie Adelsheim:

Regierungspräsidium Karlsruhe
Abteilung 7 –Schule und Bildung–
Hebelstr. 2

76133 Karlsruhe

Tel.: (0721) 926 4245

Fax.: (0721) 933 40270

www.scienceacademy.de

E-Mail: joerg.richter@scienceacademy.de

birgit.schillinger@scienceacademy.de

rico.lippold@scienceacademy.de

Die in dieser Dokumentation enthaltenen Texte wurden von der Kurs- und Akademieleitung sowie den Teilnehmerinnen und Teilnehmern der 21. JuniorAkademie Adelsheim 2024 erstellt. Anschließend wurde das Dokument mithilfe von L^AT_EX gesetzt.

Gesamtredaktion und Layout: Jörg Richter, Tobias van Lier

Copyright © 2024 Jörg Richter, Dr. Birgit Schillinger

Vorwort

„Völlig losgelöst ...“

... vom Schulalltag schwebten 76 Jugendliche schwerelos durch den „Kosmos“ – unser diesjähriges Motto – der 21. JuniorAkademie Adelsheim. Wie auch Major Tom im gleichnamigen Sommerhit von Peter Schilling begaben sich die Teilnehmerinnen und Teilnehmer der diesjährigen Science Academy auf eine Reise in neue Welten – eine Reise in die Weiten der Wissenschaft. Begleitet von unserem 28köpfigen Leitungsteam sollten sie schon bald neue Interessen entdecken, wissenschaftliche Erfahrungen sammeln und Freundschaften knüpfen.

Der Startschuss für diese Mission fiel Mitte Juni auf dem Gelände des Landesschulzentrum für Umweltbildung (LSZU) in Adelsheim. Am Eröffnungswochenende kam unsere Crew das erste Mal zusammen und lernte sich kennen – alle mit ganz eigenen Vorerfahrungen, Talenten und Erwartungen. Was sie auf ihrem Flug so alles erleben würden, stand zu diesem Zeitpunkt noch in den Sternen.



Im Sommer dann nahm unsere Reise so richtig Fahrt auf. Über zwei Wochen hinweg arbeiteten die Teilnehmerinnen und Teilnehmer in den sechs Kursen und entdeckten und gestalteten gemeinsam den Mikrokosmos Akademie.

Der Philosophiekurs verglich dystopische und utopische Welten, im Kurs Mathematik/Informatik wurde der Energiemix der Zukunft analysiert und optimiert, und die Medizinerinnen und Mediziner

fragten sich, was „Gesundheit“ eigentlich bedeutet. Unterdessen schickte der Meteorologiekurs einen Wetterballon in den Himmel, die Astronominnen und Astronomen richteten ihren Blick auf Meteoriden im Weltall und Meteoriten auf der Erde, und der Kurs Mathematik/Physik ging nochmal einen Schritt weiter und erforschte gleich die Unendlichkeit.

Neben der Kurszeit haben sich die Crewmitglieder bei Ausflügen und in den KüAs, beim Morgensport, im Theater oder als Teil des Orchesters, bei Wanderungen und Grillabenden besser kennengelernt und ihre Interessen ausgelebt. So verging die Zeit wie im Flug, und der große Abschlussabend kam viel zu früh.

Am Dokumentationswochenende im Herbst bot sich dann die Möglichkeit, auf die schöne gemeinsame Zeit zurückzublicken und über die Entdeckungen aus dem Trip durch den Akademie-Kosmos zu reflektieren. Zwar war damit nun die Zeit in Adelsheim vorbei, doch unsere Reise ist noch lange nicht zu Ende.

Losgelöst und schwerelos schweben wir weiter, doch anders als Major Tom melden wir uns zurück – hier und heute, mit dieser Dokumentation. Wir wünschen Euch und Ihnen viel Spaß beim Lesen!

Eure/Ihre Akademieleitung



Melissa Bauer (Assistenz)



Mathis Bußhoff (Assistenz)



Jörg Richter



Dr. Birgit Schillinger

Inhaltsverzeichnis

VORWORT	3
KURS 1 – ASTRONOMIE	7
KURS 2 – LITERATUR/PHILOSOPHIE	33
KURS 3 – MATHEMATIK/INFORMATIK	53
KURS 4 – MATHEMATIK/PHYSIK	73
KURS 5 – MEDIZIN	97
KURS 6 – METEOROLOGIE/PHYSIK	115
KÜAS – KURSÜBERGREIFENDE ANGEBOTE	135
DANKSAGUNG	151
BILDNACHWEIS	152

Kurs 4 – Die unendliche Reise



Unser Kurs

Jochen (Großkahn von Cadmium) Jochen zeigte sich stets begeistert von seinen Teilnehmerinnen und Teilnehmern und zog sie aufgrund seiner großen Wertschätzung sogar seinen Igel zu Hause vor. Es bleibt bis heute ein Rätsel, wie er so viele Bücher in seinem Koffer dabei haben konnte, und er war immer darum besorgt, dass alle mitkamen und ihre Fragen stellten, ohne sich davor zu scheuen. Er trug sowohl maßgeblich zur Harmonie im Kurs als auch zur Verbreitung wichtiger Lebensweisheiten bei!

Silas (Sir von Silizium) Als buchstäblich rennfahrender Wissenschaftsduden stellte Si-

las eine der drei Kursleiter-Konstanten dar und schüchtern mit seiner erleuchtenden Kompetenz schon beinahe ein. Durch seine regelmäßigen Keks-, Eis- und Snacklieferungen hat er sich seine Sympathie jedoch mehr als nur erkämpft und alle waren dankbar, sich im Falle einer überaus spezifischen Frage vertrauensvoll an ihn wenden zu können. Ob mit coolen Socken, Windows MacBook oder Sierpinski-Pyramiden-Hut – Silas ist und bleibt unsere Kompetenz in Person!

Anna Lena (Lady Selen) Anna Lena erklärte nicht nur sehr verständlich und an ihre Zuhörer angepasst, sondern entwickelte sich

im Laufe der Akademie auch zu unserer allgemeinen Lieblingsastronomin. Am Do-kuwochenende brachte sie heroisch einen Romanescokohl mit, was sie zu einer Ikone unseres Kurses machte. Ebenso fühlte man sich mit ihr immerzu wohl und das lag nicht nur an ihren Hausschuhen, sondern auch an ihrer ansteckenden Freundlichkeit und beachtlichen fachlichen Ahnung!

Mara (Herzogin Hydrogenium) Mara war nie ohne ihre Unendlichkeits-Schleife anzutreffen. Dieses Symbol machte sie zum ehrenhaften Oberhaupt der Unendlichkeitssekte. In diese Sekte steckte sie alles, was sie hatte. Egal, ob beim Sportfest oder beim Check-Up. Auch wenn ihre Stimme manchmal etwas unter den Schlachtrufen litt, ihre Stimmung tat es nie. Im Kurs war Mara für jeden Spaß zu haben und wenn einmal Materialien fehlten, war sie schneller im AL-Büro, als man schauen konnte.

Benedikt (Hilbert(t)raumforscher) Mit seiner großen Begeisterung für Werner Heisenberg und Kurt Gödel passt er perfekt zum Kurs. Er hat immer eine Frage parat und schreckt auch bei Nobelpreisträgern nicht vor diesen zurück. „Kann man das auch mathematisch darstellen?“, bleibt trotzdem eine seiner ikonischsten Fragen. Nicht nur seine Art des Denkens, sondern auch seine Herangehensweise an wissenschaftliche Herausforderungen regten an, sich selbst weiter zu bilden. Alles in allem bereicherte er unseren Austausch nachhaltig.

Charlotte F. (Prinzessin Neon) Charlotte war stets mit Charlotte anzutreffen und sorgte im Kurs immer für eine gute Stimmung. Das AL-Büro war durch viele Verletzungen ihre zweite Heimat und so war sie fast jeden Tag dort anzutreffen. Charlotte verfügt über viele außergewöhnliche Talente, zum Beispiel Stromschläge zu bändigen und lebhaftes Geschichten über Hilbert zu erzählen. Doch eine Sache war klar: Schlechte Laune gab es mit ihr nie!

Charlotte G. (Prinzessin Caesium) Gemeinsam mit ihrer Namensvetterin strahlt sie immerzu fröhliche Vibes aus und sorgte mit ihrer extrovertierten Art besonders zu Be-

ginn für lockere Stimmung im Kurs. Auch kennt sie sich super mit den natürlichen Zahlen aus und ist so intellektuell, dass sogar eine Diskussion über Dönerbrot mit ihr zu einer höchst wissenschaftlichen Angelegenheit wird! Am Ende des Tages muss jedoch festgehalten werden, dass ihr Yufka trotz allem besser schmeckt!

Constantin (Baron Xenon) Mit seinen quantifizierten Neologismen erklärt er den Skalenfaktor so schnell wie kein anderer und perfektioniert als passionierter Banger Fotograf die Beschreibung von Silas Windows MacBook (ziemlich cursed)! Constantin ist nicht nur konzentriert beim Rechnen, sondern auch äußerst humorvoll und sarkastisch. Er kann meist nicht still sitzen, so sehr bewegen ihnen die Mysterien um dunkle Materie und Energie.

Felix (Fürst von und zu Krypton) Mit Felix ist bezüglich Rätseln nicht oder sehr viel zu spaßen – je nachdem, ob das Mana bereits in ihm fließt oder noch nicht. Seine Wissbegierde bereicherte den Kurs und Themen wie zum Beispiel Entropie lassen ihn bis heute nicht los. Schon seit der Rotationspräsentation ist er Verfechter des Hilbertturms, sobald die Sprache auf das Hotel der unendlichen Mengen kommt.



Gruppenarbeit

Ignatius (Sir Tyrann Uranium) Als überzeugter Marvel-Fan fragte sich Ignatius, als er das Kurs-T-Shirt zum ersten Mal sah, sofort, was Spiderman eigentlich mit Unendlichkeit zu tun hat. Während der Kursschienen war er immer der Ruhepol des Kurses, selbst wenn sich niemand mehr konzentrie-

ren konnte, und so trug er maßgeblich zu einer lernfreudigen Atmosphäre bei!

Joakim (Ritter Einsteinium) Joakim beeindruckte im Kurs alle damit, dass er einen Zauberwürfel in unter 15 Sekunden lösen kann und deshalb erhielt er den Titel „Inoffizieller Weltmeister des Zauberwürfelloßens“. Bei der Einführung eines neuen Themenblocks verstand er scheinbar immer alles als Erster und konnte so viel zum Kurs beitragen. Das ist grundsätzlich eine sehr beeindruckende Eigenschaft und schüchternete doch viele andere Kursteilnehmer zunächst ein, doch mit seiner sympathischen Umgangsweise machte er sich immer wieder beliebt!

Jonas (Freiherr von Iod) Jonas war eines der Programmiergenies des Kurses. Mit Leichtigkeit brachte er nicht nur einfache Koch-Schneeflocken auf den Bildschirm, sondern auch solche, die selbst für den Rechner zu komplex waren. Außerdem sorgte Jonas immer für die richtig wichtigen Fragen im Kurs und war für eine Diskussion stets zu haben. Diese führte er nicht nur fachlich differenziert sondern auch ausdauernd aus, was von seinem großen Intellekt zeugt.

Kira (Königin von Kalium) Als einer der kreativen Köpfe des Kurses ist Kira immer voller Ideen, sobald es ans Darstellen und Visualisieren geht. Sie ist insgeheim die Schöpferin des Romanescokohl-Gags und zudem immer vorbereitet. Außerdem spürt sie mit ihrer königlichen Nase jede falsche Zeitform auf, um diese in das Präteritum zu setzen, und im Gegensatz zu ihrer Theaterrolle Peggy wollen wir alle ihre Bilder sehen!

Laura (Lady Lawrencium) Nicht nur als ihre Rolle Daniela im Theaterstück fällt Laura als stilvoll auf, auch im Kurs bringt sie genau das richtige Maß an Höflichkeit und Humor mit. Mit ihren scharfen Augen bemerkt sie nicht nur Feinheiten in Gleichungen, sondern auch Peppa-Pig-Aufsteller in Schaufenstern, über die sie sich als ihrerseits großer Fan natürlich sehr freute! Im Gegensatz zu anderen Kursteilnehmerinnen hat Laura auch tatsächlich lange, blonde Haare.

Leticia (Lady Helium von Bor) Dieses Mädchen hat viele Talente (quetscht eine ganze Präsentation auf eine Karteikarte) und immer tolle Ideen, weshalb sie auch die Anführerin des Elementclans ist. Leticia ist Fangirl einiger Wissenschaftler/innen. Vielleicht hat sie daher die vielen Fun Facts, was sie für uns zum Allgemeinwissen-CEO macht. Mit ihr kann man immer gut über so ziemlich alles reden, aber auch Walzer durch den Kursraum tanzen. Außerdem ist sie nicht blond!!!

Lukas (Lord tiny Plutonium) Im Kontrast zu seiner Theaterrolle Arne erschien Lukas immer optimistisch im Kurs, und selbst, wenn seine eventuellen Liebesbriefe im Theaterstück nicht ganz fehlerfrei waren, seine Rechnungen überzeugten stets mit ihrer Richtigkeit. Lukas bewies sich nicht nur als Genie des Codings beim Programmieren der Koch-Schneeflocke, sondern auch als charakterstark mit der Gründung einer weiteren kursinternen Sekte: der Anti-Sekten-Sekte!

Ronja (Ritterin Radon) Ronja ist die erfolgreichste Schnürsenkelforscherin aus unserem Kurs. Mit den coolsten Geburtstags-T-Shirts war sie das Oberhaupt der Anti-Anti-Sekten-Sekte. Im Kurs war Ronja immer bei der Sache und auch beim Planspiel zeigte sie vollen Einsatz.

Einleitung

ANNA LENA, JOCHEN UND SILAS

Wir begaben uns mit unserem Kurs auf eine Reise zu den Geheimnissen der Unendlichkeit. Im Juni trafen sich 13 neugierige Jugendliche mit uns Kursleitern zu einem ersten Einstieg in die Thematik des unendlich Großen und des beliebig Kleinen. Unendlich und die Null beschäftigen die Menschen schon seit der Antike. Der Blick in den Nachthimmel fasziniert die Menschen schon immer, in der Mathematik ist die Null eine unbequeme Zahl, durch die man nicht dividieren kann, Unendlichkeit ist durch eine Zahl nicht fassbar.

Nach dem Eröffnungswochenende erarbeiteten hochmotivierte Jugendliche in Tandems ein

Thema ihrer Wahl zur Thematik Unendlichkeit, das sie zu Beginn der Sommerakademie im Kurs vorstellten. Von schwarzen Löchern, dem Urknall und Singularitäten bis zum Paradoxon des Wettrennens zwischen Achill und der Schildkröte war alles dabei. Achill gibt der Schildkröte einen fairen Vorsprung und damit scheint der Ausgang des Rennens vorbestimmt. Doch wenn Achill den Vorsprung eingeholt hat, ist die Schildkröte schon weg ...

Wir mussten uns entscheiden, was in zwei Wochen gemeinsam erarbeitet werden kann. Mathematische Methoden mussten entwickelt werden, die den Vergleich von Mengen und dann sogar von unendlich großen Mengen erlauben. Wir begegneten fraktalen Strukturen und stellen fest, dass dabei konvergente und divergierende Größen auftauchen. Wir wollten Methoden vorstellen, mit denen wir Grenzwerte exakt nachweisen und dadurch auch die Null beherrschbar machen können. Ein Beweisverfahren, das Aussagen für alle natürlichen Zahlen möglich macht, wurde benötigt.

Die Suche nach der Unendlichkeit hörte nicht auf und wir tauchten in die Kosmologie ein. Das führte zu der Frage, warum der Nachthimmel eigentlich dunkel ist, woher man weiß, dass sich das Universum ausdehnt, und wieso wir Aussagen über das Alter des Universums machen können.

Ein Zitat, das Einstein zugeschrieben wird und gut zu unserem Kursthema passt: „Zwei Dinge sind unendlich. Das Universum und die menschliche Dummheit. Aber beim Universum bin ich mir nicht ganz sicher.“

Hilberts Hotel

CHARLOTTE F. UND FELIX

Das erste Thema, mit dem wir uns im Kurs schon am Eröffnungswochenende beschäftigten, war die Mengenlehre. Ein sehr anschauliches Gedankenexperiment dazu ist Hilberts Hotel, das unendlich viele Zimmer hat, die alle durchnummeriert sind (1, 2, 3, 4, 5, ...). Allerdings ist jedes Zimmer schon belegt.

Nun klopft es am späten Abend an der Tür. Es ist ein weiterer Gast, der um ein Zimmer bittet.

Eigentlich ist das Hotel zwar schon voll, aber Hilbert hat eine Idee. Er macht eine Durchsage und bittet alle Gäste darum, ein Zimmer weiterzuziehen (Gast 1 zu Zimmer 2, Gast 2 zu Zimmer 3, ...). Nun ist das Zimmer mit der Nummer 1 frei für den neuen Gast. Mathematisch kann man sagen:

$$f : x \mapsto x + 1,$$

jede Zimmernummer wird um eins erhöht.

Allerdings wird es eine lange Nacht für Hilbert und seine Gäste, denn ein Bus mit unendlich vielen durchnummerierten Plätzen fährt vor und die Passagiere bitten ebenfalls um einen Schlafplatz für die Nacht. Eigentlich gibt es kein freies Zimmer mehr, doch Hilbert hat eine Idee: Mit einer erneuten Durchsage bittet er die Gäste, alle in das Zimmer mit der doppelten Zimmernummer zu ziehen (Gast 1 in Zimmer 2, Gast 2 in Zimmer 4, Gast 3 in Zimmer 6, ...). Jetzt sind alle Zimmer mit geraden Zimmernummern mit Hilberts vorherigen Gästen belegt und in Zimmer mit ungeraden Zimmernummern können die Neuankömmlinge einziehen, wodurch alle beruhigt schlafen können. Mathematisch kann man dies für die bereits im Hotel Eingekerkerten wie folgt darstellen:

$$f : x \mapsto 2x$$

Für die neu Eintreffenden gilt:

$$f : x \mapsto 2x - 1$$

In Hilberts Hotel wird es jedoch nie wirklich ruhig. Denn nun fahren plötzlich unendlich viele Busse (alle durchnummeriert) mit jeweils unendlich vielen Passagieren (Sitzplätze durchnummeriert) auf den Parkplatz des Hotels und bitten um einen Ort zum Ausruhen. Eigentlich scheint das Hotel nun wirklich voll zu sein. Doch Hilbert will die Gäste auch nicht draußen schlafen lassen. Er muss sich also etwas einfallen lassen.

Da er ein herausragender Mathematiker ist, findet er natürlich auch dafür eine Lösung. Diese wird im Kapitel zu natürlichen und rationalen Zahlen erklärt.

Da es nur ein Gedankenexperiment ist, konnten wir – abgesehen davon, dass das Hotel unendlich viele Zimmer hat – noch ein paar weitere Probleme außer Acht lassen. Vor allem, sobald man die Zeit miteinbezieht. Von Zimmer 1 in Zimmer 2 zu wechseln, dürfte selbst bei relativ großer Zimmergröße kein Problem darstellen, und auch von Zimmer 3 zu Zimmer 6 wäre noch gut machbar. Schwierig wird es allerdings, sobald man von beispielsweise Zimmer 1000 in Zimmer 2000 ziehen soll. Und bei noch höheren Zimmerzahlen wäre das vermutlich gar nicht mehr in einer normalen Lebenszeit zu schaffen. Aber was hat uns dieses Gedankenexperiment gebracht?

Mengen

CHARLOTTE F. UND LAURA

Indirekt nutzten wir bei Hilberts Hotel bereits Mengen. Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Objekten. Diese werden Elemente der Menge genannt. Solche Elemente können alles Mögliche sein, wie Gegenstände oder Worte – in der Mathematik sind es aber meistens Zahlen. Um Mengen beschreiben zu können, verwendet man die Eigenschaft „Mächtigkeit“, die die Anzahl der Elemente einer Menge angibt. Um die Mächtigkeit verschiedener Mengen zu vergleichen, benötigen wir das Konzept einer bijektiven Funktion.

Funktionen und Bijektivität

FELIX UND LAURA

Eine Funktion ordnet Elementen des Definitionsbereichs D Elemente des Wertebereichs W zu (der Definitions- und Wertebereich sind hierbei zwei Mengen). Das sieht in mathematischer Notation so aus:

$$f : D \rightarrow W$$

$$x \mapsto y$$

Dabei ist x ein Element der Menge D und y ein Element der Menge W .

Eine Funktion ist dann bijektiv, wenn sie jedem Element des Definitionsbereichs D genau

ein Element des Wertebereichs W zuordnet und andersherum, sodass es immer Wertepaare sind. (Die Funktion $y = x^2$ ist zum Beispiel nicht bijektiv, da jedem y -Wert zwei x -Werte zugeordnet werden.)

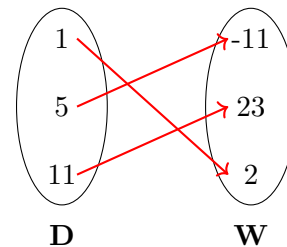


Abb. 1: Beispiel für eine Bijektive Funktion

Wenn eine bijektive Funktion zwischen zwei Mengen existiert, sind diese gleichmächtig. Für endliche Mengen ist es einfach, die Mächtigkeit zu bestimmen, da die Elemente gezählt werden können. Spannend wird es bei Mengen mit unendlich vielen Elementen.

Unendliche Mengen

FELIX UND LAURA

Wie bereits erwähnt, können Mengen auch unendlich groß sein. Beispiele für unendliche Mengen sind Zahlenmengen wie die natürlichen Zahlen \mathbb{N} , die ganzen Zahlen \mathbb{Z} , die rationalen Zahlen \mathbb{Q} oder die reellen Zahlen \mathbb{R} .

In unserem Unendlichkeitskurs stellten wir uns die Frage, ob all diese Mengen gleichmächtig sind. Hier versagt die Intuition, wie bereits Hilberts Hotel zeigt. Wenn eine Menge bereits unendlich viele Elemente besitzt, wie kann sie dann noch größer werden? Sollte aber auf der anderen Seite die Menge aller negativen und positiven Zahlen nicht größer als lediglich die Menge aller positiven Zahlen sein? Um diese Verwirrung aufzulösen, können wir bijektive Funktionen nutzen und mathematische Beweise anstelle von Vermutungen liefern.

Bei endlichen Mengen lässt sich die Mächtigkeit durch Zählen der Elemente bestimmen. Bei Mengen mit unendlich vielen Elementen ist das offensichtlich nicht möglich, aber wir können die Mächtigkeit verschiedener Mengen mit Hilfe von bijektiven Funktionen vergleichen.

Natürliche Zahlen \mathbb{N} und ganze Zahlen \mathbb{Z}

Natürliche Zahlen sind positive, ganze Zahlen (also ohne Nachkommastellen) inklusive der Null. Ganze Zahlen beinhalten alle natürlichen Zahlen sowie alle negativen Zahlen ohne Nachkommastellen.

Um die Mächtigkeiten dieser zwei Mengen zu vergleichen, versuchten wir, sie durch eine bijektive Funktion zu verknüpfen und stießen dabei auf folgende Zuordnung:

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2}, & \text{wenn } x \text{ gerade} \\ \frac{x+1}{2}, & \text{wenn } x \text{ ungerade} \end{cases}$$

Diese Funktion verknüpft die Mengen folgendermaßen: Die Null wird der Null zugeordnet, eine gerade natürliche Zahl x genau einer negativen ganzen Zahl y und eine ungerade natürliche Zahl x genau einer positiven Zahl y der ganzen Zahlen. Die Beträge der ganzen Zahlen werden hierbei alle zwei Zahlen in einem Intervall von 1 größer. Somit konnten wir eine bijektive Funktion zwischen den natürlichen Zahlen und den ganzen Zahlen finden und beweisen, dass diese beiden unendlichen Mengen gleichmächtig sind.

Natürliche Zahlen \mathbb{N} und rationale Zahlen \mathbb{Q}

Rationale Zahlen sind alle Zahlen, die sich als Bruch darstellen lassen, und beinhalten daher auch alle ganzen und natürlichen Zahlen. Um die Mächtigkeit dieser beiden Mengen zu vergleichen, nutzten wir das Cantorsche Diagonalverfahren.

An die Achsen einer Tabelle schreiben wir jeweils alle natürlichen Zahlen, beginnend bei eins, auf. Die Zahlen oben sind die Zähler und die Zahlen links sind die Nenner. So haben wir eine Tabelle mit jedem möglichen Bruch und können eine Linie, die jeden dieser Brüche trifft, durchziehen (siehe Abb. 2).

Dabei muss man jedoch darauf achten, nur vollständig gekürzte Brüche zu treffen, da manche Zahlen sonst zweimal getroffen werden. (Zum Beispiel kann man $\frac{2}{4}$ auf $\frac{1}{2}$ kürzen. Würden wir

$\frac{2}{4}$ nicht weglassen, hätten wir $\frac{1}{2}$ also zweimal getroffen und unsere Funktion wäre nicht mehr bijektiv). Diese Linie stellt unsere bijektive Funktion dar. Jede natürliche Zahl n bekommt den n -ten Bruch auf dieser Linie zugeteilt. Man könnte also die Brüche „durchzählen“ und so die dazugehörige natürliche Zahl bestimmen. Damit ist bewiesen, dass die natürlichen Zahlen die gleiche Mächtigkeit haben wie die rationalen Zahlen, da jede rationale Zahl genau einmal getroffen wird.

	1	2	3	4	5
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$
4	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$
5	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$

Abb. 2: Cantorsches Diagonalverfahren

Dieses Wissen können wir nutzen, um Hilberts Problem zu lösen. Er kann eine Tabelle nach dem Cantorsche Diagonalverfahren erstellen. Die erste Zeile stellt das Hotel dar und die weiteren Zeilen die jeweiligen Busse. Die Spalten sind die Zimmer- oder Sitzplatznummern der Gäste. Wir können nun eine Linie durch die Tabelle zeichnen, die jeden Platz trifft und jedem Platz eine natürliche Zahl der Reihenfolge nach zuordnet. Folgen die Gäste der Linie und gehen der Reihenfolge nach in die Zimmer, können alle Gäste untergebracht werden.

Natürliche Zahlen \mathbb{N} und reelle Zahlen \mathbb{R}

Reelle Zahlen sind alle rationalen und irrationalen Zahlen, also auch Zahlen, die sich nicht als Bruch darstellen lassen.

Für den Vergleich dieser beiden Mengen erstellen wir eine Tabelle, in der wir jeder natürlichen Zahl eine beliebige reelle Zahl zwischen 0 und 1 zuordnen. In dieser Tabelle kann aber nie jede reelle Zahl erscheinen, da wir mit einem be-

stimmten Prinzip immer eine neue reelle Zahl erstellen können, die nicht in dieser Darstellung aufzufinden ist. Da die reellen Zahlen in der Tabelle beliebig gewählt sind, zeigt das, dass man keine bijektive Funktion zwischen den beiden Mengen aufstellen kann.

natürliche Zahl	reelle Zahl
1	0.618142634 ...
2	0.867546812 ...
3	0.321988456 ...
4	0.144486464 ...
⋮	⋮

Um eine neue reelle Zahl zu generieren, schreiben wir uns zunächst „0“ auf. Danach nehmen wir die erste Nachkommastelle der ersten reellen Zahl und addieren 1. Bei der zweiten Zahl nehmen wir die zweite Nachkommastelle und addieren wieder 1. Wenden wir diese Vorschrift auf die ganze Tabelle an, so erhalten wir eine Zahl, die in der Tabelle nicht vorkommt, da sie sich in mindestens einer Nachkommastelle von jeder Zahl in der Tabelle unterscheidet.

Dadurch konnten wir beweisen, dass wir keine bijektive Funktion zwischen den natürlichen Zahlen und den reellen Zahlen aufstellen können und sie deshalb nicht gleichmächtig sind.

Fazit

Hilberts Hotel zeigt, dass wir eine Bijektion zwischen den natürlichen Zahlen, den ganzen Zahlen und den rationalen Zahlen aufstellen können.

Wir können jedoch keine Bijektion zwischen den natürlichen und den reellen Zahlen aufstellen. Nicht alle unendlichen Mengen sind also gleich groß! Um diese unterschiedlich großen Unendlichkeiten zu vergleichen, verwendet man \aleph_n (gesprochen: „Aleph n“), welches die Mächtigkeit einer unendlichen Menge angibt. Die Mächtigkeit der natürlichen Zahlen ist \aleph_0 , wohingegen die Mächtigkeit der reellen Zahlen \aleph_1 genannt wird.

So lernten wir, auch unendliche Mengen zu vergleichen und deren Mächtigkeiten zu definieren, auch wenn sie sich manchmal entgegen unserer Intuition verhalten.

Irrationalitätsbeweis $\sqrt{2}$

BENEDIKT UND RONJA

Wie unendliche Mengen verhalten sich auch irrationale Zahlen nicht intuitiv. Im Folgenden soll dargelegt werden, dass $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist.

Zunächst wird angenommen, dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl sei. Damit sollte es möglich sein, diese als Bruch darzustellen:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

Hierbei sind m und n natürliche Zahlen, die zudem teilerfremd sind, das heißt keinen gemeinsamen Teiler aufweisen. Somit liegt ein vollständig gekürzter Bruch vor. Da m und n teilerfremd sind, können nicht beide gerade sein.

Da das Quadrat von $\sqrt{2}$ gleich 2 ist, folgt aus der Annahme:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$$

$$\iff m^2 = 2n^2$$

Daraus folgt, dass m^2 eine gerade Zahl ist, weil es durch 2 teilbar ist. Folglich muss auch m eine gerade Zahl sein, denn das Quadrat einer ungeraden Zahl wäre ungerade.

Wenn m gerade ist, lässt sich m als $m = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}$ schreiben. Setzen wir dies in die Gleichung ein:

$$(2k)^2 = 2n^2$$

$$\iff 4k^2 = 2n^2$$

$$\iff 2k^2 = n^2$$

Daraus folgt, dass auch n^2 und somit n gerade sein muss.

Zusammenfassend zeigten wir, dass sowohl m als auch n gerade sind, was im Widerspruch zu der Annahme steht, dass m und n teilerfremd seien. Damit erreichten wir einen Widerspruch und somit ist die Annahme, dass $\sqrt{2}$ rational ist, falsch.

Daraus folgt:

$$\sqrt{2} \text{ ist irrational.}$$

Näherung von π durch Programmierung

JONAS UND LUKAS

Die bekannteste irrationale Zahl ist die Kreiszahl π , die das Verhältnis zwischen Umfang und Durchmesser eines Kreises beschreibt. Sie findet in vielen Teilgebieten der Mathematik Anwendung. Trotz ihrer unendlich vielen nicht periodischen Nachkommastellen lassen sich Methoden finden, π anzunähern, indem Nachkommastellen berechnet werden. Das setzten wir in Python um. An dieser Aufgabe durften wir uns als erstes allein oder in Kleingruppen versuchen. Dabei fanden wir vier Methoden, die im Folgenden vorgestellt werden.

1. Vielecke

Unsere erste Methode bestand darin, ein regelmäßiges Vieleck in einen Kreis zu zeichnen, dessen Umfang zu berechnen, die Formel für den Umfang eines Kreises nach π aufzulösen und schließlich den berechneten Umfang und Radius einzusetzen. Je mehr Ecken das Vieleck hat, desto genauer wird die Annäherung an π . Die Formel für den Umfang eines Kreises lautet:

$$U = 2\pi r$$

$$\Leftrightarrow \pi = \frac{U}{2r}$$

Nun müssen wir den Umfang des Vielecks berechnen. Als erstes bemerkt man, dass man jedes regelmäßige n -Eck in $2n$ gleichgroße Dreiecke unterteilen kann (siehe Abb. 3).

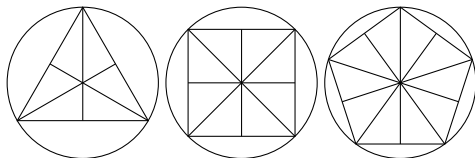


Abb. 3: In Dreiecke zerlegte Vielecke

Schauen wir uns ein solches Dreieck in Abbildung 4 genauer an: x ist die Länge, die wir suchen, um später den Umfang zu berechnen, r ist der Radius des Kreises und α ist die Hälfte eines Innenwinkels des Vielecks. Da dieses

Dreieck rechtwinklig ist, kann man hier den Kosinus anwenden:

$$\cos(\alpha) = \frac{x}{r}$$

$$\Leftrightarrow x = r \cdot \cos(\alpha)$$

Da α die Hälfte eines Innenwinkels in einem regelmäßigen n -Eck ist, gilt:

$$\alpha = \frac{180^\circ \cdot n - 360^\circ}{2n}$$

Setzt man das in die obige Formel für x ein, erhält man:

$$x = r \cdot \cos\left(\frac{180^\circ \cdot n - 360^\circ}{2n}\right)$$

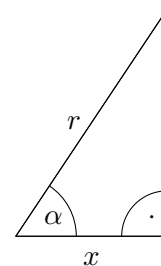


Abb. 4: Eins der Dreiecke in Abb. 3.

Um nun den Umfang zu berechnen, multiplizieren wir x mit $2n$, da wir das Vieleck in $2n$ Dreiecke aufteilen:

$$U = 2n \cdot x$$

$$= 2n \cdot r \cdot \cos\left(\frac{180^\circ \cdot n - 360^\circ}{2n}\right)$$

Setzen wir das in unsere Formel für π ein, erhalten wir:

$$\pi \approx \frac{2n \cdot r \cdot \cos\left(\frac{180^\circ \cdot n - 360^\circ}{2n}\right)}{2r}$$

$$= n \cdot \cos\left(\frac{180^\circ \cdot n - 360^\circ}{2n}\right)$$

Dieser Term sollte sich π annähern, wenn n immer größer wird. Die Berechnung setzten wir in Python um. Das Ergebnis sieht man in Abbildung 5. In diesem Diagramm sieht man in rot den eigentlichen Wert von π und in blau unseren Näherungswert.

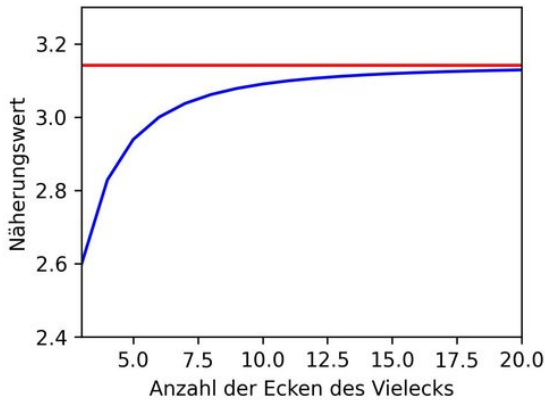


Abb. 5: π -Näherung 1 – Vielecke

2. Konvergierende Reihe

Wenn man die Konvergenz dieser Reihe nach Euler voraussetzt, lässt sich damit auch π annähern:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Wenn man die Reihe nach π auflöst, erhält man:

$$\pi = \sqrt{6 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}$$

Damit kann man leicht eine Annäherung für π berechnen, indem man eine endliche Anzahl Summenglieder aufsummiert und das Ergebnis in obige Formel einsetzt. Je mehr Summenglieder aufsummiert werden, desto genauer wird die Näherung. Das Ergebnis ist in der Grafik Abb. 6 zu sehen.

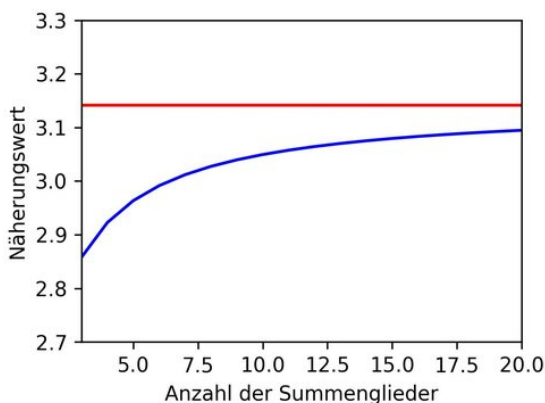


Abb. 6: π -Näherung 2 – Konvergierende Reihe

3. Zufällige Punkte

Die nächste Methode erfordert einen Kreis mit Durchmesser 1 und darum herum ein Quadrat mit der Kantenlänge 1. Dann werden viele Punkte zufällig im Quadrat verteilt und es wird gezählt, wie viele davon innerhalb des Kreises liegen. Das Verhältnis der Anzahl der Punkte im Kreis zu der Gesamtanzahl der Punkte sollte sich dem Verhältnis der Flächeninhalte $\frac{A_{\circ}}{A_{\square}}$ annähern, wenn die Anzahl der Punkte immer größer wird.

Die Fläche des Quadrats ist 1 und die Fläche des Kreises ist $\frac{\pi}{4}$. Also nähert es sich dem Verhältnis $\frac{\pi}{4}$ an. Das Ergebnis dieser Abschätzung für π sieht man in Abbildung 7.

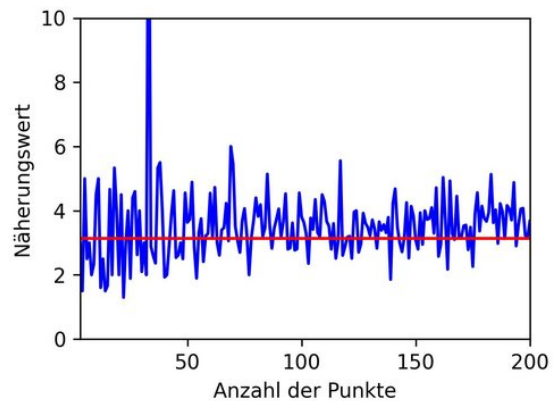


Abb. 7: π -Näherung 3 – Zufällige Punkte

4. Punkte in einem Gitter

Diese Methode ist im Wesentlichen identisch zur vorherigen. Allerdings werden die Punkte hier nicht zufällig verteilt, sondern in einem Gitter. Das Ergebnis sieht man in der Grafik Abb. 8.

Fazit

Nachdem wir alle Methoden in Python umgesetzt hatten, konnten wir abschließend feststellen, dass die Abschätzung mit Hilfe der konvergierenden Reihe eindeutig die schnellste war, gefolgt von der geometrischen Methode auf dem zweiten, der der zufälligen Punkte auf dem dritten und der der Punkte im Gitter auf dem vierten Platz.

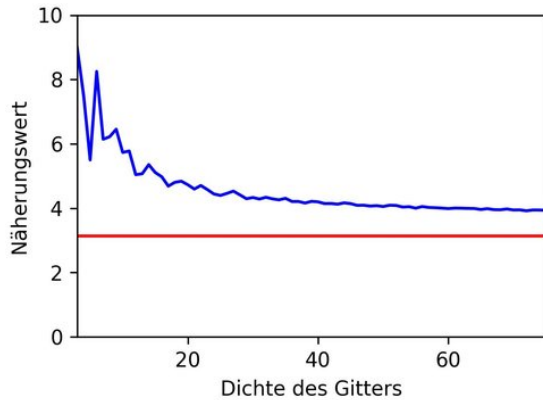


Abb. 8: π -Näherung 4 – Punkte in einem Gitter

Allerdings fiel uns auf, dass wir bei der geometrischen Methode die Kosinus-Funktion verwenden und wir nicht wissen, wie diese in Python berechnet wird. Theoretisch könnte es also sein, dass Python für die Berechnung des Kosinus π verwendet, und somit eventuell π mit Hilfe von π berechnet wird. Für die Näherung mit der konvergierenden Reihe nach Euler hätten wir für die vollständige Herleitung noch den Grenzwert $\frac{\pi^2}{6}$ beweisen müssen.

Also ist die überarbeitete Platzierung: zufällige Punkte auf dem ersten Platz und Punkte im Gitter auf dem zweiten.

Rekursionsformel zur Berechnung von π

CONSTANTIN UND JOAKIM

Die unendlich vielen Nachkommastellen näherten wir bereits mit der Kosinus-Funktion an. Um einen Ringschluss auszuschließen, stellten wir eine Rekursionsformel (Formel, die sich auf das vorherige Folgenglied bezieht) zur Berechnung von π auf, die keine trigonometrischen Funktionen verwendet. Hierbei näherten wir den Umfang eines Kreises wieder durch ein regelmäßiges Vieleck an.

Dafür zeichneten wir ein regelmäßiges Sechseck und dessen Umkreis mit einem Radius $r = 1$ und entsprechendem Umfang $U = 2\pi$. Des Weiteren zogen wir einen Radius, der eine Sechseckseite in einem rechten Winkel schneidet, und bezeichneten fünf Punkte wie in Abbildung 9. Wiederholt man dieses Vorgehen an allen

Seiten des Sechsecks, bildet sich ein Zwölfeck, dessen Eckpunkte auf dem Kreis liegen.

Wir legten Ordnungen n für diese Polygone (regelmäßige Vielecke) fest, wobei ein Sechseck der Ordnung $n = 0$ entspricht, ein Zwölfeck der Ordnung $n = 1$, ein Vierundzwanzigeck der Ordnung $n = 2$ und so weiter.

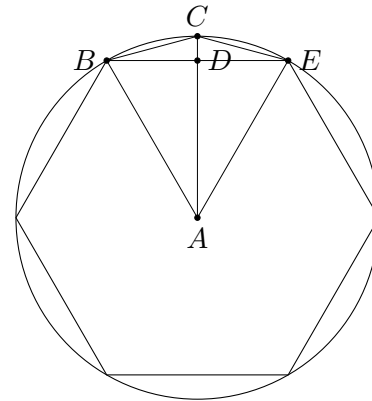


Abb. 9: 0. Rekursionsstufe

Für den Umfang U_0 des Sechsecks gilt $U_0 = 6BE$, für den Umfang U_1 des Zwölfecks $U_1 = 12BC$, und somit für den Umfang U_n des n -ten Polygons $U_n = 2^n \cdot 6 \cdot l_n$, wobei l_n der Seitenlänge des Polygons entspricht. Stellen wir nun eine allgemeingültige Gleichung in Relation von BE zu BC und somit von l_{n-1} zu l_n auf, bekommen wir eine Rekursionsformel für den Umfang U_n der Polygone und somit eine Annäherung für π , da sich der Umfang der Polygone dem des Kreises und damit 2π annähert.

Durch den Satz des Pythagoras und die Länge $r = 1$ der Kreisradien können wir folgende Gleichungen herleiten:

- I. $AD^2 + BD^2 = AB^2 = 1$
 $\iff AD^2 = 1 - BD^2$
 $\iff AD = \sqrt{1 - BD^2}$
- II. $BD^2 + CD^2 = BC^2$
- III. $AD + CD = AC = 1$
 $\iff CD = 1 - AD$
- IV. $BD = \frac{BE}{2}$

Durch Einsetzen und Umformen der Gleichungen können wir eine Gleichung aufstellen, die

nur die Längen BC und BE (bzw. l_n und l_{n-1}) enthält:

$$\begin{aligned}
 BD^2 + (1 - AD)^2 &= BC^2 \\
 BD^2 + (1 - \sqrt{1 - BD^2})^2 &= BC^2 \\
 BD^2 + 1 - 2\sqrt{1 - BD^2} + (1 - BD^2) \\
 &= 2 - 2\sqrt{1 - BD^2} = BC^2 \\
 \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - BD^2}} &= BC \\
 \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{BE}{2}\right)^2}} &= BC,
 \end{aligned}$$

beziehungsweise:

$$\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{l_{n-1}}{2}\right)^2}} = l_n$$

Erinnern wir uns an das oben erwähnte Verhältnis von Umfang U_n zu Länge l_n :

$$\begin{aligned}
 U_n &= 2^n \cdot 6 \cdot l_n \\
 l_n &= \frac{U_n}{2^n \cdot 6}
 \end{aligned}$$

Zusammen mit der Formel für l_n erhalten wir eine Rekursionsformel für den Umfang der Polygone:

$$U_n = 2^n \cdot 6 \cdot \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{U_{n-1}}{2^n \cdot 6}\right)^2}}$$

Da das Sechseck in sechs gleichseitige Dreiecke unterteilt werden kann und die Seitenlängen deswegen dem Radius seines Umkreises entsprechen, beträgt der Umfang U_0 unseres Sechsecks $U_0 = 6$. Indem wir mit diesem Wert den Umfang für immer höhere Ordnungen n berechnen, erhalten wir immer bessere Näherungen für π . Bei theoretisch unendlich vielen Ordnungen bekämen wir genau π . Die Näherungswerte für einige Ordnungen n sind in der folgenden Tabelle festgehalten. Die Stellen, die mit π übereinstimmen, sind rot markiert.

Man kann erkennen, dass wir schon für relativ kleine n gute Annäherungen für π erhalten. Unsere Formel ist somit recht effizient.

Ordnung n	Annäherung für π ($U_n/2$)
0	3,0000000000...
1	3,1058285412...
2	3,1326286133...
3	3,1393502030...
4	3,1410319509...
5	3,1414524723...
6	3,1415576079...
7	3,1415838921...
8	3,1415904632...
9	3,1415921060...
10	3,1415925167...
11	3,1415926194...
12	3,1415926450...
13	3,1415926515...

Nachkommastellen von π , berechnet mit der Rekursionsformel

Grenzwerte und Epsilontik

BENEDIKT UND RONJA

Im vorherigen Absatz nutzten wir oft das Wort Folge. Eine Folge ist eine Funktion mit dem Definitionsbereich der natürlichen Zahlen. Die Folgenglieder können entweder direkt oder mit einer Rekursionsformel dargestellt werden. Somit lässt sich die Annäherung von π im vorherigen Absatz auch als Folge verstehen.

Folgen können einen sogenannten Grenzwert besitzen, dem sie sich annähern. Das nennt man Konvergenz. Zum Beispiel besitzt die Rekursionsfolge aus dem letzten Abschnitt den Grenzwert π .

Man kann den Grenzwert wie folgt definieren: Eine Folge (a_n) hat den Grenzwert g , wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ (gesprochen: „Epsilon“) ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n > n_0$ gilt: $|a_n - g| < \varepsilon$.

Dabei ist ε nicht allgemein festgelegt, jedoch liegen ab dem spezifischen Wert n_0 alle Folgenglieder innerhalb der ε -Umgebung um den Grenzwert g . Die ε -Umgebung ist notwendig und unerlässlich, da man mit ihr Grenzwerte mathematisch definieren kann.

a_{n_0} bezeichnet das erste Folgenglied, das in der ε -Umgebung um g liegt. $|a_n - g|$ bezeichnet den Abstand zwischen dem Grenzwert g und dem jeweiligen Folgenglied a_n .

Man kann die obige Definition auch anders formulieren: Eine Folge besitzt einen Grenzwert g , wenn es zu jedem beliebigen $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ gibt, nach dem alle weiteren Folgenglieder in der ε -Umgebung um g liegen, d.h. $|a_n - g| < \varepsilon$ für alle $n > n_0(\varepsilon)$.

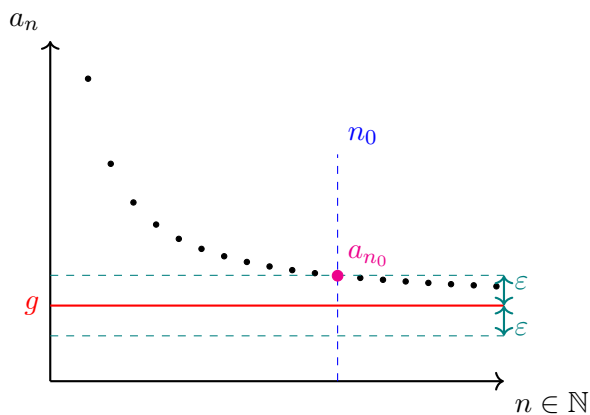


Abb. 10: Epsilonumgebung

Man verwendet in der Mathematik häufig Symbole, zum Beispiel Quantoren, um solche Definitionen präzise auszudrücken. Das liegt daran, dass sich mathematische Definitionen teilweise nur sehr umständlich in geschriebener Sprache formulieren lassen und die der Sprache anhaftende Ungenauigkeit das exakte Definieren in der Mathematik erschweren kann. Der Allquantor \forall steht für „für alle“ und der Existenzquantor \exists für „es existiert“. Mit Quantoren dargestellt sieht die Definition für einen Grenzwert so aus:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \\ \forall n > n_0 : |a_n - g| < \varepsilon$$

Vollständige Induktion

BENEDIKT, CHARLOTTE F. UND RONJA

Um zu zeigen, dass eine spezifische Folge einen mathematischen Sachverhalt korrekt beschreibt, kann man anhand der vollständigen Induktion die betreffende Folge beweisen.

Die vollständige Induktion ist ein mathematisches Beweisprinzip, mit dem sich die Gültigkeit einer Aussage für alle natürlichen Zahlen beweisen lässt. Dabei zeigt man zuerst, dass die Aussage für eine konkrete Zahl n_0 gilt. Dieser Schritt ist der Induktionsanfang. Anschließend

zeigt man, dass die Behauptung, wenn sie für eine beliebige Zahl n stimmt (Induktionsvoraussetzung), auch für den Nachfolger $(n + 1)$ stimmt (Induktionsschritt).

Ein Beispiel zur Veranschaulichung ist ein unendlich langes Domino. Um zu zeigen, dass jeder Stein umfällt, muss man nur zeigen, dass der erste umfällt und dass jeder beliebige Stein umfällt, wenn sein Vorgängerstein umgefallen ist. Als Anwendungsbeispiel bewiesen wir die Gaußsche Summenformel mit vollständiger Induktion.

Beweis der Gaußschen Summenformel

Wir wollen zeigen, dass

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Induktionsanfang:

$n_0 = 1$:

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} \text{ stimmt.}$$

Bildlich gesprochen wurde hiermit gezeigt, dass der erste Dominostein umfällt.

Induktionsvoraussetzung:

Die Aussage gilt für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$, also:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Induktionsschritt $n \rightarrow n + 1$:

Behauptung: Wir behaupten, dass die Aussage auch für $n + 1$ gilt, da wir als Induktionsvoraussetzung annehmen, dass die Aussage für n gilt.

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + (n + 1) \\ = \frac{(n + 1)((n + 1) + 1)}{2}$$

Nun können wir auf der linken Seite der Gleichung

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + (n + 1)$$

die Voraussetzung einsetzen und erhalten damit:

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

Nun wird dieser Term umgeformt und in einen gemeinsamen Bruch geschrieben:

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$$

Mit einer weiteren Umformung erhalten wir die rechte Seite der Gleichung, wie wir sie als Behauptung aufgestellt hatten:

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Damit ist bewiesen, dass die Formel für jede natürliche Zahl ≥ 1 gilt. In unserer Analogie wurde eine Kettenreaktion ausgelöst und alle Steine fallen um.

Turm von Hanoi

CHARLOTTE F. UND RONJA

Folgen finden auch bei praxisbezogenen Anwendungen Gebrauch, um den dabei vorhandenen mathematischen Zusammenhang zu erfassen.

Ein Beispiel ist der Turm von Hanoi. Das ist ein Spiel, bei dem man einen Stapel unterschiedlich großer Holzscheiben von einem äußeren von drei Feldern auf das auf der anderen Seite umsetzen soll. Dabei darf immer nur eine Scheibe bewegt und nie eine größere auf einer kleineren platziert werden.

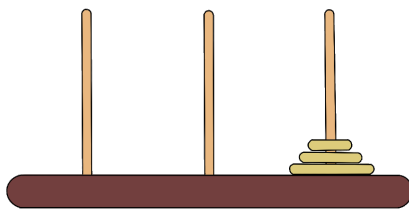


Abb. 11: Turm von Hanoi

Nun wollen wir die minimal benötigte Anzahl an Zügen bei n Scheiben bestimmen:

- Eine Scheibe: 1 Zug
 1. Man legt die Scheibe auf das Zielfeld.

- Zwei Scheiben: 3 Züge
 1. Eine Scheibe wird in die Mitte gelegt.
 2. Man legt die untere Scheibe auf das Zielfeld.
 3. Die Scheibe aus der Mitte legt man auf die jetzt auf dem Zielfeld liegende Scheibe.
- Drei Scheiben: 7 Züge
 1. Mit drei Zügen bewegt man die oberen beiden Scheiben in die Mitte
 2. Die untere Scheibe wird auf das Zielfeld gelegt (4. Zug).
 3. Die zwei Scheiben aus der Mitte legt man nun mit drei Zügen auf das Zielfeld.

Analog dazu kann man für jedes n vorgehen. Man braucht also immer 2-mal die Anzahl der Züge, die mit einer Scheibe weniger benötigt werden, plus eins. Als Formel:

$$Z_n = 2 \cdot Z_{n-1} + 1$$

Z_n beschreibt die minimal benötigte Anzahl an Zügen bei n Scheiben. Da es mit dieser Formel sehr umständlich ist, das Ganze für größere n zu berechnen, weil man immer die Umsetzungen für $n - 1$ auch ausrechnen müsste, haben wir uns die Werte für einige n angeschaut:

n	Z_n
1	1
2	3
3	7
n	$2 \cdot Z_{n-1} + 1$

Dabei ist uns aufgefallen, dass sie immer um eins kleiner sind als die nächste Zweierpotenz. In Zweierpotenzen geschrieben sieht das folgendermaßen aus:

$$2^1 - 1, 2^2 - 1, 2^3 - 1, \dots, 2^n - 1$$

Wir vermuten also, dass gilt:

$$Z_n = 2^n - 1$$

Diese Formel lässt sich wie folgt durch vollständige Induktion beweisen:

Induktionsanfang:

$$n_0 = 1 : \quad 2^1 - 1 = 1 \quad \text{stimmt.}$$

Induktionsvoraussetzung:

$Z_n = 2^n - 1$ gilt für ein beliebiges n .

Induktionsbehauptung:

Es gilt:

$$Z_{n+1} = 2 \cdot Z_n + 1 = 2^{n+1} - 1$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} 2 \cdot Z_n + 1 &= 2 \cdot (2^n - 1) + 1 \\ &= 2^{n+1} - 2 + 1 \\ &= 2^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

Damit wurde gezeigt, dass man die Anzahl der minimal benötigten Züge direkt berechnen kann, auch ohne sie für jedes kleinere n zu kennen.

Fraktale

JONAS UND LUKAS

Einer der anschaulichsten und schönsten Teile der Unendlichkeit sind wahrscheinlich die Fraktale. Fraktale sind per Definition geometrische Muster, die sich unendlich oft in immer kleiner werdenden Maßstäben in sich selbst wiederholen. Ein Beispiel aus dem Alltag ist der Romanescokohl, dessen Muster sich scheinbar unendlich oft wiederholt.



Romanescokohl am Doku-Wochenende

Ein Fraktal beruht auf einem Initiator und einer Vorschrift, die auf den Initiator angewendet wird. Die Anzahl der Anwendungen der Vorschrift auf den Initiator nennt man Ordnung.

Wenn die Vorschrift beispielsweise sechsmal auf den Initiator angewendet wird, hat das Fraktal die Ordnung sechs.

Koch-Schneeflocke

Ein weiteres Beispiel für ein Fraktal ist die Kochkurve, benannt nach Helge von Koch. Der Initiator der Kochkurve ist eine Strecke und die Vorschrift besagt, dass die Strecke gedrittelt und das mittlere Drittel durch ein gleichseitiges Dreieck ohne Grundseite mit dem Drittel der Strecke als Seitenlänge ersetzt wird.



Abb. 12: Definition der Kochkurve:
links der Initiator, rechts die Vorschrift

Der Initiator kann als grundlegendes Element für die Koch-Schneeflocke verwendet werden. Die 0. Ordnung der Koch-Schneeflocke besteht aus einem gleichseitigen Dreieck, wobei jede Seite dem Initiator einer Kochkurve entspricht.

Bei der Koch-Schneeflocke geht der Umfang gegen unendlich, wenn man die Ordnung n gegen unendlich gehen lässt, während der Flächeninhalt gegen einen endlichen Grenzwert konvergiert. Später in diesem Kapitel zeigen wir dieses Phänomen für die Sierpinski-Pyramide, ebenfalls ein Fraktal.

Programmieren der Koch-Schneeflocke

Um die Koch-Schneeflocke darzustellen, schrieben wir ein Programm in Python, das diese zeichnet. Dabei gingen wir auf verschiedene Arten vor.

Zunächst trugen wir die Punkte für die ersten Ordnungen einzeln ein und erzielten damit schnell ein treffendes Ergebnis. Allerdings ist das nicht praktisch für höhere Ordnungen der Koch-Schneeflocke, da es sehr zeitaufwendig ist. Deswegen schrieben wir ein Programm, das die Koch-Schneeflocke nach Angabe der Ordnung zeichnet. Dafür nutzten wir die Bibliotheken NumPy, Matplotlib und Matplotlib.pyplot und gingen folgendermaßen vor:

Zuerst gaben wir die Punkte der ersten Ordnung der Koch-Schneeflocke ein. Daraufhin

schrieben wir eine Funktion, die einen Punkt hinzufügt. Danach fingen wir an, Unterprogramme zu programmieren, die an verschiedenen Stellen das mittlere Drittel einer Strecke durch ein gleichseitiges Dreieck ohne Grundseite ersetzen. Dabei stellten wir fest, dass es sechs Möglichkeiten gibt, wie das Dreieck orientiert sein kann.

Für den Fall eines waagerechten Initiators sieht das wie folgt aus: Zuerst wird die Orientierung überprüft – in unserem Beispiel waagerecht. Im Anschluss wird überprüft, in welche Richtung das Ende des Segments zeigt. Das entscheidet über die Richtung, in die das Dreieck zeigen soll, in unserem Beispiel nach oben. Um die auf der Linie liegenden Eckpunkte des neuen Dreiecks zu berechnen, dividiert man zunächst die Länge der betrachteten Linie durch drei und fügt daraufhin die Punkte entsprechend ein. Für die x-Koordinate des verbleibenden Eckpunkts des neuen Dreiecks nehmen wir die Mitte zwischen dem Startpunkt und dem Endpunkt des Segments. Zum Berechnen der y-Koordinate addieren wir die Höhe des neuen Dreiecks zur y-Koordinate des Startpunkts. Die Höhe lässt sich mit dem Satz des Pythagoras berechnen und beträgt immer $\frac{\sqrt{3}}{6}$ multipliziert mit der Länge der Linie.

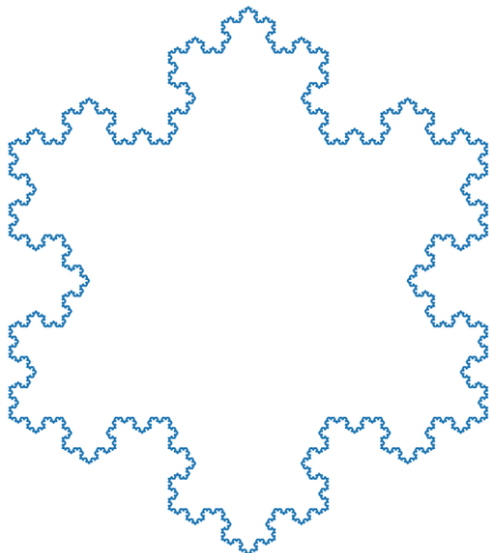


Abb. 13: Koch-Schneeflocke der 5. Ordnung

Für die anderen Fälle ist das Vorgehen ähnlich. Abhängig von der Ordnung mussten wir nur noch die Unterprogramme abhängig von den Ausgangspunkten in der richtigen Reihenfolge

hintereinanderreihen. Mit dem fertigen Programm ist es möglich, nur durch die Eingabe der Ordnung die Koch-Schneeflocke darzustellen.

Unsere Sierpinski-Pyramide

CHARLOTTE F. UND KIRA

Neben der Koch-Schneeflocke gibt es noch viele weitere Fraktale. Beispielsweise das Sierpinski-Dreieck, benannt nach dem polnischen Mathematiker Waclaw Sierpiński (1882–1969), welches ein gleichseitiges Dreieck ist, das nach ganz bestimmten Regeln unterteilt wird. Die Seiten des Dreiecks (0. Ordnung) werden dabei halbiert und aus den drei entstandenen Punkten wird ein neues Dreieck (1. Ordnung) gebildet.

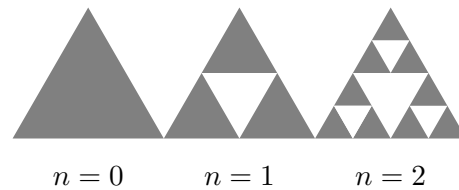


Abb. 14: Sierpinski-Dreieck in Ordnung 0, 1, und 2

Wenn die Seitenlänge unseres Dreiecks a lang ist, dann beträgt der Flächeninhalt $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ mit a als Kantenlänge, was dem Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks entspricht. Für die erste Ordnung wird dann ein Dreieck in der Mitte herausgenommen, somit bleiben $\frac{3}{4}$ des Flächeninhalts übrig. Dieses Schema setzt sich auch für die höheren Ordnungen fort, womit sich für den Flächeninhalt n -ter Ordnung ergibt:

$$A_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right)$$

Wie man in der Abbildung sehen kann, nimmt der Flächeninhalt mit zunehmender Ordnung immer weiter ab. Der Umfang nimmt aber zu, denn pro Ordnung und Initiator kommt nochmal die halbe Kantenlänge hinzu. Somit erhalten wir für den Umfang n -ter Ordnung:

$$U_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot 3a$$

Während der Flächeninhalt immer kleiner wird, wird der Umfang immer größer. Das scheint

ziemlich unintuitiv, kann allerdings mathematisch erklärt werden, indem man den Grenzwert für die Fläche

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right) = 0$$

und den Grenzwert für den Umfang

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot 3a \rightarrow \infty$$

bestimmt.

Wir haben also ein Objekt, das mit zunehmendem Umfang immer kleiner wird. Diese „Gegensätzlichkeit“ ist ein typisches Merkmal von Fraktalen.

Schon am Eröffnungswochenende beschlossen wir, selbst so ein Fraktal zu bauen. Das bedeutete, dass wir viele kleine Pyramiden aus Karton benötigten, um eine Sierpinski-Pyramide, also die dreidimensionale Form des Sierpinski-Dreiecks, zu bauen.



Da es kompliziert wäre, aus der Pyramide immer kleinere Pyramiden herauszuschneiden, hatte unsere Grundbaustein-Pyramide eine festgelegte Größe und unser Fraktal als Ganzes wuchs mit zunehmender Ordnung. Über die Zeit bis zu den zwei Wochen im Sommer bastelten wir fleißig kleine Pyramiden aus Pappkarton, die allerdings noch nicht zusammengefaltet waren. Das war dann während der Akademie unser Pausenjob. Auf gefährlicher Mission im Papier-Container beschafften Charlotte und

Charlotte noch weiteres Material für noch mehr kleine Dreiecke. Letztendlich schafften wir es aber, eine 3-dimensionale Sierpinski-Pyramide der 4. Ordnung zu basteln, mit der unser Kompetenz-Gott Silas die maximale Kompetenz erreichte.

Kosmologie

CHARLOTTE G., CONSTANTIN, KIRA
UND LETITCIA

Nachdem wir uns mit den mathematischen Konzepten der Unendlichkeit beschäftigt hatten, wollten wir in der Physik auf die Suche nach dem Unendlichen gehen. Im Folgenden wird der physikalische Aspekt unserer Kursarbeit beleuchtet. Oft verbindet man mit dem Universum auch die Unendlichkeit, weshalb wir uns intensiv mit dem Verhalten des Universums auf verschiedenen Ebenen auseinandersetzten.

Nachts ist der Himmel dunkel. Doch warum genau?

CHARLOTTE G. UND CONSTANTIN

Wenn man nachts in den Himmel schaut, kommt man nicht um die Frage herum, warum der Nachthimmel trotz der vielen Sterne dunkel ist. Um diese Frage beantworten zu können, trafen wir zunächst folgende Annahmen:

1. Der Raum ist unendlich ausgedehnt.
2. Alle Sterne haben eine endliche Ausdehnung und Leuchtkraft.
3. Es gibt unendlich viele Sterne.
4. Es herrscht eine homogene Sternverteilung.
5. Die Sterne und das Universum ändern sich in beliebigen Zeiten nicht.

Nehmen wir nun an, dass unsere Annahmen stimmen, so müsste es auch in der Nacht taghell sein. Denn die unendlich vielen Sterne um uns herum würden auch den Nachthimmel erleuchten.

Betrachtet man das Ganze in einem Modell, so setzt man zunächst einen Beobachtungspunkt. Um diesen Punkt herum liegen, wie bei einer Zwiebel, Schalen. Diese Schalen werden, je weiter sie von dem Beobachtungspunkt entfernt

sind, immer größer und haben somit auch mehr Volumen. Das bedeutet im Umkehrschluss, dass in ihnen mehr Sterne enthalten sind. Dieser Umkehrschluss beruht auf der Annahme der homogenen Sternverteilung. Die Anzahl der Sterne pro Einheitsvolumen kann mit n bezeichnet werden und ist auch als Dichte bekannt:

$$n = \frac{m}{V}$$

Hierbei ist m die Anzahl der Sterne und V das Volumen.

Mit diesem n und der Formel für das Volumen einer Kugelschale lässt sich eine allgemeine Formel für die Anzahl der Sterne in einer Schale herleiten:

$$N = n \cdot 4\pi r^2 \cdot T$$

Dabei steht T für die Schalendicke und r für ihren Abstand zum Beobachtungspunkt.

Betrachten wir einen Stern einzeln, so können wir auch hier eine Formel aufstellen, nämlich die Formel für den Energiefluss von einem Stern in der Schale, der den Beobachtungspunkt erreicht:

$$f = \frac{L}{4\pi r^2}$$

L beschreibt die Menge an Photonen pro Zeit. Mit unserem vorherigen Wissen über die Anzahl der Sterne in einer Schale können wir so eine neue Formel aufstellen, die Formel für den Energiefluss aus der Schale zum Beobachtungspunkt:

$$F = N \cdot f = L \cdot n \cdot T$$

Wenn jetzt also in allen Schalen, die unendlich weiter gehen, immer gleich viele Sterne pro Volumen sind und alle Licht aussenden, warum ist es bei uns dann nachts dunkel?

Da Licht sich mit einer Geschwindigkeit von 300 000 000 m/s, der Lichtgeschwindigkeit, fortbewegt, bräuchte das Licht von den äußeren Schalen eine beachtliche Zeit, um am Beobachtungspunkt anzukommen.

Somit können wir schlussfolgern: Der Nachthimmel ist dunkel, weil das Universum nicht unendlich ist oder ein endliches Alter hat und das Licht der entfernteren Sterne noch nicht bei uns angekommen ist.

Dopplereffekt und Emissionslinien

IGNATIUS UND LETICIA

Um besagtes Alter zu berechnen, beschäftigen wir uns zunächst mit den grundlegenden Eigenschaften von Licht und dessen Verhalten.

Im Periodensystem existieren Stand 2024 genau 118 chemische Elemente, aus denen unser Universum besteht. Jedes dieser Elemente besitzt eigene Charakteristika, eins davon bilden sogenannte Emissionslinien. Diese sind sozusagen „Elementsignaturen“ und können eindeutig zugeordnet werden.

Im Kurs setzten wir uns zwar nicht im Detail mit deren Ursprung auseinander, allerdings lässt sich anhand eines Beispiels simpel nachvollziehen, wie solche chemischen Unterschriften zustande kommen. Betrachtet man das Element Wasserstoff (H) mit einem Proton und einem Elektron und fügt ihm Energie, beispielsweise in Form von Wärme, zu, so wird diese zunächst vom Elektron absorbiert. Dadurch wird es kurzzeitig auf ein höheres Energieniveau gehoben, aber die zugeführte Energie reicht nicht aus, um das Elektron in den freien Zustand zu bewegen. Da das angeregte Elektron die Energie nicht behalten kann, fällt es auf sein ursprüngliches Energieniveau zurück und gibt dabei die vorher zugeführte Energie wieder ab. Das geschieht in Form von Licht, also mehr oder weniger energetischen Photonen.

Da sich die Energiedifferenzen für die Energieniveaus der Elektronen zwischen verschiedenen Elementen unterscheiden, werden beim Zurückfallen der Elektronen ebenfalls unterschiedliche Energien, also Wellenlängen, emittiert. Jedes Element besitzt unterschiedlich viele Elektronen, die wiederum unterschiedliche Energieniveaus besitzen, weshalb Emissionslinien charakteristisch für den jeweiligen Stoff sind.

Ein kurzes Ausholen: Licht verhält sich bekanntlich sowohl wie ein Teilchen als auch wie eine Welle. In unseren Überlegungen beschäftigten wir uns explizit mit dem Wellencharakter des Lichts. Betrachtet man eine Welle mit der Wellenlänge λ (gesprochen „Lambda“), die die Strecke zwischen einer Amplitude und der nächsten beschreibt, kann man ein interessantes Phänomen beobachten: den Dopplereffekt.

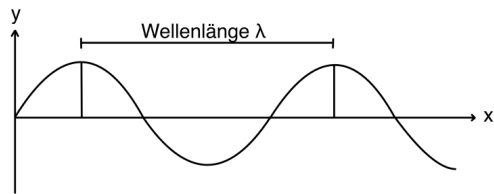


Abb. 15: Darstellung der Wellenlänge

Dieser tritt auf, wenn sich der Sender während des Aussendens einer Welle vom Empfänger entfernt oder sich diesem nähert. Dabei wird die Welle gestreckt oder gestaucht, da eine zusätzliche Geschwindigkeit zur eigentlichen Aussendungsgeschwindigkeit vorhanden ist. Gleiches gilt auch für die Bewegung des Empfängers. Illustriert wird der Dopplereffekt beispielsweise durch das Schaubild in Abb. 16.

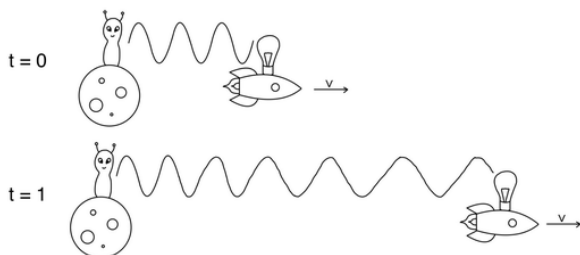


Abb. 16: Dopplereffekt, der eine Welle streckt oder staucht

Ein Beispiel aus dem Alltag ist ein vorbeifahrender Krankenwagen, da Schall ebenfalls eine Welle ist und das Signal des Martinshorns beim Annähern und beim Wegfahren mit unterschiedlicher Frequenz wahrgenommen wird.

Um beide Themen wunderbar im Kosmos zu verknüpfen, setzten wir uns im Kurs mit einer der prominentesten Emissionslinien des Wasserstoffs auseinander – $H\alpha$ mit einer Wellenlänge von 656,28 nm, also ein kräftiges Rot in unseren Augen. Die $H\alpha$ -Linie lässt sich nämlich beispielsweise in Nachbargalaxien messen. Nur kommt $H\alpha$ nicht so bei uns an, wie es ausgesendet wurde!

Tatsächlich bewegen sich die meisten Galaxien mit einer Relativgeschwindigkeit von uns weg, und weil sie währenddessen natürlich auch Wasserstoffemissionslinien emittieren, kommt hier der Dopplereffekt ins Spiel. Da die Galaxien sich wegbewegen und die Wellenlängen dadurch immer länger, also im Grunde „röter“,

werden, nennt man dieses Phänomen auch Rotverschiebung. Somit können wir, wenn wir die $H\alpha$ -Wellenlänge messen, die Relativgeschwindigkeit bestimmen.

Die Wellenlänge λ kann durch

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

beschrieben werden. Hierbei ist c die Lichtgeschwindigkeit und f die Frequenz.

Da uns der Zusammenhang zwischen Strecke s , Zeit t und Geschwindigkeit v bekannt ist, stellen wir zusammen eine Formel auf, mit der man zu bereits erwähnter Relativgeschwindigkeit der betreffenden Objekte gelangt:

$$\begin{aligned} \lambda' &= \lambda + s = \lambda + v \cdot t = \lambda + v \cdot \frac{1}{f} \\ &= \lambda + v \cdot \left(\frac{1}{c/\lambda} \right) \\ &= \lambda + v \cdot \left(\frac{\lambda}{c} \right) \\ &= \lambda \cdot \left(1 + \frac{v}{c} \right) \end{aligned}$$

Hierbei ist λ die ausgesendete und λ' die empfangene Wellenlänge.

So haben wir beispielsweise herausgefunden, dass sich die Galaxie NGC 3034, die 3,835 Mpc entfernt ist, mit unter 100 km/s von uns wegbewegt, während Galaxien wie zum Beispiel NGC 7469 deutlich weiter von uns entfernt sind und sich proportional auch deutlich schneller von uns entfernen, in diesem Falle mit 4591 km/s.

Bestimmung des Hubbleparameters

KIRA UND LETICIA

Diese Proportionalität wollten wir genauer beschreiben können. Dazu berechneten wir mithilfe der hergeleiteten Formel die Relativgeschwindigkeiten von weiteren Galaxien und schlugen deren Entfernungen zur Erde nach (siehe Tabelle auf der nächsten Seite).

Mpc steht für Megaparsec, ein astronomisches Entfernungsmaß: $1 \text{ Mpc} = 3,086 \cdot 10^{19} \text{ km}$.

Die Daten können wir in einem Graphen veranschaulichen. Dafür zeichnen wir ein Diagramm, dessen x-Achse die Entfernungen der

Galaxie	Entfernung [Mpc]	Relativ- geschwindigkeit [km/s]
NGC 3034	3,835	100
NGC 4631	5,097	662,37
NGC 6217	20,643	1192,3
NGC 1357	27,450	2005,1
NGC 3227	18,750	2041,92
NGC 6181	31,281	2183,5
NGC 3471	28,071	2215,5
NGC 6764	27,978	2252,0
NGC 7469	59,756	4590,9

Datenquelle: <https://ned.ipac.caltech.edu/>,
Stand: 19.09.2024

Galaxien und dessen y-Achse deren Relativgeschwindigkeiten darstellt. Da die Punkte dem Trend einer Geraden folgen, zeichnen wir eine Näherungsgerade ein.

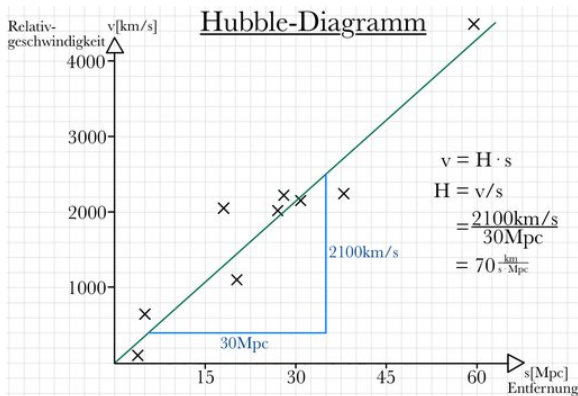


Abb. 17: Hubble-Diagramm

Ein solches Diagramm wird auch Hubble-Diagramm genannt, da es erstmals von Edwin Hubble (1889–1953) gezeichnet wurde. Die Gerade zeigt erneut, wie wir schon festgestellt haben, dass die Relativgeschwindigkeiten in einem proportionalen Zusammenhang mit den Entfernungen der Galaxien wachsen.

Dieser proportionale Zusammenhang lässt sich mit der Steigung der Geraden beschreiben, die Hubbleparameter H genannt wird. Er beträgt bei unserem Diagramm $70 \frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}}$, wobei der aktuelle Literaturwert des Hubbleparameters $H = 74,2 \pm 3,6 \frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}}$ beträgt.

Der Kehrwert des Hubbleparameters wird Hubble-Zeit t_H genannt und stellt das Alter des Universums dar. Die Hubble-Zeit können wir

mit unserem Wert für den Hubbleparameter berechnen. Wir haben also den Kehrwert von $70 \frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}}$ genommen, die Einheit zu Jahren umgewandelt und dann folgendes Ergebnis erhalten:

$$t_H \approx 13,997 \text{ Milliarden Jahre}$$

Das Universum ist also nach unseren Berechnungen ungefähr 14 Milliarden Jahre alt.

Somit fanden wir die Unendlichkeit nicht im Alter des Universums. Einen demonstrativen Geburtstag feierten wir trotzdem.

Weltenmodelle und die Friedmann-Gleichung

CHARLOTTE G. UND CONSTANTIN

In unseren vorherigen Berechnungen gingen wir von einer linearen Ausdehnung des Universums aus. Doch das ist nicht der Fall. Mit der Aufstellung eines Weltenmodells können wir das Verhalten des Universums beschreiben und Vorhersagen über die zukünftige Entwicklung treffen. Jedoch benötigt dieses Modell ein paar Grundannahmen:

Als erstes nehmen wir an, dass das Universum in jede Richtung gleich aussieht, und das für jeden Beobachter im Universum. Diese Annahme kann einem erstmal komisch vorkommen – wenn wir den Sternenhimmel beobachten, dann sieht es offensichtlich nicht überall gleich aus. Doch wenn wir uns das Universum auf immer größer werdenden Skalen anschauen, wird es immer gleichmäßiger. Diese Ortsunabhängigkeit nennt man auch Homogenität.

Außerdem gehen wir davon aus, dass das Universum in jeder Richtung gleich funktioniert. Schon Kopernikus zeigte, dass die Erde nicht im Mittelpunkt des Sonnensystems steht. Ebenso nimmt die moderne Kosmologie an, dass wir uns an keiner ausgezeichneten Stelle im Universum befinden, genauso wenig wie alle anderen Beobachter. Dann muss das Universum um jeden Punkt herum richtungsunabhängig sein und somit auch keinen Mittelpunkt haben. Diese Richtungsunabhängigkeit heißt auch Isotropie.

Im Raum unseres Modells ist also jeder Punkt isotrop und homogen. Wir können einen beliebigen Punkt betrachten, uns eine Kugel mit dem Radius R darum denken und ein Testteilchen auf die Kugeloberfläche setzen. Diese Kugel besitzt überall die gleiche Dichte ρ und den gleichen Druck P , da sie sonst nicht homogen wäre. Alle Eigenschaften dieser Kugel sind nur noch von der Zeit t abhängig.

Wir müssen außerdem darauf achten, dass das Verhalten der Kugel nicht von ihrer absoluten Größe abhängt. Sonst könnte zum Beispiel eine kleinere Kugel im Inneren der großen Kugel schneller oder langsamer wachsen oder schrumpfen als ihr großes Gegenstück. Somit würde die Kugel nicht homogen bleiben. Daraus folgern wir, dass die Kugel so klein gewählt werden kann, dass in ihr das Newtonsche Gravitationsgesetz

$$F_G = -\frac{GMm}{R^2} = -\frac{4\pi G}{3}mR\rho$$

gilt und die Kugel trotz allem noch als Modelluniversum betrachtet werden kann. Hierbei ist F_G die Gravitationskraft, G die Gravitationskonstante, m eine Testmasse und M die Masse, R der Radius und ρ die Dichte der Kugel.

Die Masse M kann durch

$$M = V\rho = \frac{4\pi}{3}R^3\rho$$

mit

$$V = \frac{4\pi}{3}R^3$$

beschrieben werden.

Mit simplen physikalischen Gesetzen konnten wir nun eine Gleichung aufstellen, die das Verhalten des Modelluniversums beschreibt. Dazu benötigten wir lediglich:

- Das Newtonsche Gravitationsgesetz
- Das Gesetz der Kraft $F = m \cdot a$
- Den Energieerhaltungssatz

Es besteht folgender Zusammenhang zwischen Radius R , Geschwindigkeit v und Beschleunigung a :

$$a = \dot{v}, \quad v = \dot{R}, \quad a = \ddot{R}$$

Nun können wir eine Bewegungsgleichung

$$m \cdot \ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3}mR\rho$$

aufstellen, indem wir die Kraft $m \cdot a$ mit der Gravitationskraft F_G gleichsetzen. Bevor wir uns die Lösung dieser Differenzialgleichung anschauen, müssen wir noch den Skalenfaktor a einführen. Er beschreibt das Verhältnis zwischen dem Kugelradius R und ihrem heutigen Radius R_0 :

$$a = \frac{R}{R_0}$$

Diesen benötigen wir im unten folgenden Graphen. Der Skalenfaktor zeigt die Größe des Universums, genormt auf die heutige Größe.

Bei der Lösung der Gleichung kommt ein weiterer Parameter hinzu: der Krümmungsparameter k . Es gibt verschiedene Möglichkeiten, welchen Wert dieser haben kann:

- $k = +1$: Elliptisches/sphärisches Universum
- $k = 0$: Euklidisches Universum (Weltall offen/unendlich oder geschlossen/endlich, Universum flach)
- $k = -1$: Hyperbolisches Universum (sattelförmig)

Momentan wird ein flaches, offenes Universum mit $k = 0$ favorisiert, mit unserer Rechnung können wir aber auch andere Modelle beschreiben.

Für das Herleiten und Lösen der Differenzialgleichung hätte die Akademiezeit nicht ausgereicht, deshalb schauen wir uns nur die gelöste Gleichung an, die sogenannte Friedmann-Gleichung:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_0}{a^3} + \frac{1 - \Omega_0 - \Omega_\Lambda}{a^2} + \Omega_\Lambda\right)$$

mit der Hubble-Funktion

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a}$$

Der heutige Wert H_0 ist der Hubbleparameter, den wir im vorigen Abschnitt selbst berechnet haben:

$$H_0 \approx 70 \frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}}$$

Die Friedmann-Gleichung ist eine der zentralen Gleichungen der Kosmologie. Sie beschreibt die Veränderung der Größe des Universums in Abhängigkeit von der Zeit. Dabei kommen zwei wichtige Dichteparameter vor, die die Dynamik des Universums bestimmen: Ω_0 und Ω_Λ .

- Ω_0 ist die Energiedichte der Materie. Unter Materie sind baryonische Materie und Dunkle Materie zusammengefasst. Die baryonische Materie ist die ganze bekannte Materie, während die Dunkle Materie eine unbekannte Materie beschreibt, die lediglich durch die Gravitation wechselwirkt (deshalb „dunkel“). Sie ziehen das Universum mit ihrer Gravitationswirkung „zusammen“.
- Ω_Λ ist die Energiedichte der Dunklen Energie. Sie ist eine unbekannte Kraft, die das Universum „auseinanderzieht“.

Wenn wir diese Werte verändern, bekommen wir viele verschiedene Modelle für unser Universum: die Weltenmodelle.

Im folgenden Diagramm (Abb. 18) ist auf der y-Achse der Skalenfaktor von vorher dargestellt, er beschreibt die Größe des Universums. Auf der x-Achse ist die Zeit in Milliarden Jahren zu sehen. Alle Linien gehen durch einen Punkt, da dieser die aktuelle Größe des Universums darstellt. Zwei Linien stehen besonders heraus: Rot und Gelb.

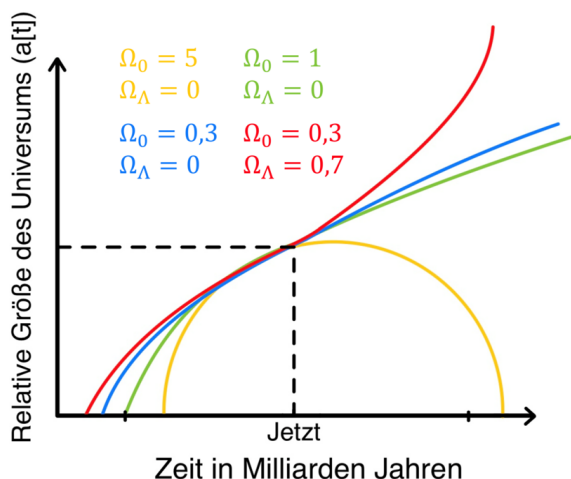


Abb. 18: Verschiedene Weltenmodelle, die aus der Friedmann-Gleichung folgen

Die gelbe Linie zeigt einen besonderen Extremfall. Sie geht von einem Universum mit sehr viel Materie aus, aber keiner Dunklen Energie.

Dabei fällt das Universum in sich zusammen, da die Ausbreitungsgeschwindigkeit durch die Gravitationswirkung immer langsamer wird, bis sie schließlich negativ wird.

Die rote Linie stellt die realen Daten dar. Das Universum besteht aus überwiegend Dunkler Energie, was die Expansion immer weiter vorantreibt. Es wird also immer schneller immer größer.

Zusammenfassend können wir sagen: Mit der Hilfe eines simplen Modells konnten wir die Dynamik des Raums beschreiben. Wir können mit Hilfe der Weltenmodelle nicht sagen, ob der Raum endlich oder unendlich ist. Also haben wir auch hier die Unendlichkeit nicht eindeutig gefunden. Wenn wir aber gemessene Daten für die Materie und Dunkle Energie einsetzen, ist eine immer schneller werdende Ausdehnung des Raums zu beobachten.

Um für den kompletten Kosmologieteil zu sprechen, befassten wir uns in der Gesamtheit dieses Kapitels mit zwei wesentlichen Eigenschaften: dem Alter des Universums und der Raumausdehnung.

Exkursion

IGNATIUS UND JOAKIM

Am Montag, den 2. September, fuhren wir früh morgens mit dem Bus los. Dieser brachte uns nach Heidelberg in die Nähe des Hauptbahnhofs, wo sich die Mathematik-Informatik-Station (MAINS) befindet. Dort durften wir uns die Ausstellung über Leonardo da Vinci anschauen, in der einige seiner Erfindungen vorgestellt wurden.

Da die Ausstellung interaktiv gestaltet war, konnten wir einen Fallschirm aus Papier basteln, überprüfen, ob wir die natürlichen Proportionen des vitruvianischen Menschen aufweisen, die Leonardo-Brücke bauen und uns mit Zahnrädern beschäftigen.

In der MAINS gab es auch eine Ausstellung über KI. Dort konnten wir unseren inneren Dirigenten durch KI-gestütztes Dirigieren herauslassen, mit Schwarzen Löchern „Pong“ spielen und einen maschinellen Lernprozess beobachten. Nach der Verabschiedung und einem

Gruppenfoto vor der MAINS machten wir uns auf den Weg zur nächsten Bushaltestelle.



In der MAINS-Ausstellung

Auf dem Weg konnten wir das Haus von Kirchhoff bestaunen, in dem er seine Spektralanalyse auf die Sonne anwendete, und ein Gruppenfoto vor der Bunsenstatue auf dem Akademieplatz aufnehmen. Ein Eis konnten sich einige von uns auch nicht entgehen lassen.



Experimentieren in der MAINS Ausstellung

Mit der Buslinie 30 ging es dann hinauf zum Haus der Astronomie auf dem Königstuhl. Dort empfing uns Carolin Liefke, die auf diesem Ge-

lände unser „Touguide“ war. Wir liefen in das Planetarium im Haus der Astronomie. Dort begaben wir uns auf eine Reise durch das Universum.



Bau der Leonardobrücke

Frau Liefke erklärte uns die Anlage und startete die Projektion. Zuerst zeigte sie uns die Bahnen der Planeten unseres Sonnensystems, dann die Sternbilder unseres Nachthimmels und unsere Heimatgalaxie, die Milchstraße, die man von der Erde aus als Band am Nachthimmel bestaunen kann. Von unseren bequemen Sitzen aus konnten wir das Universum in immer größeren Maßstäben betrachten, bis sich schließlich das gesamte beobachtbare Universum vor uns erstreckte.

Bevor wir das Planetarium verließen, durften wir noch einige Fragen stellen, die uns Frau Liefke verständlich beantwortete. Nach einer kurzen Pause, in der wir uns jeder ein Exemplar des „Spektrum der Wissenschaft – Sterne und Weltraum“ aussuchen durften, machten wir uns auf den Weg zur Landessternwarte Königstuhl unweit des Hauses der Astronomie. Dort wurde uns ein Teleskop gezeigt und Frau Liefke erzählte uns von den Schwierigkeiten, auf die man trifft, wenn man einen Asteroiden entdeckt und benennen möchte.

Zuletzt besuchten wir das Max-Planck-Institut für Astronomie. Dort zeigte sie uns Projekte, Arbeiten von Auszubildenden und die zum Institut gehörige Bibliothek. Zum Abschluss gingen wir auf das Dach des Instituts, von wo aus

wir das galaxieförmige Haus der Astronomie bewundern konnten und ein letztes Gruppenfoto machten. Nachdem wir uns von unserer Gastgeberin verabschiedet hatten, holte uns der Bus wieder ab und beförderte uns zurück zum Eckenberg.



Doppelastrograf in der Sternwarte am Königstuhl

Fazit

BENEDIKT, CHARLOTTE F., FELIX,
IGNATIUS UND LETICIA

Zusammenfassend kann man sagen, dass der Mathematik- und Physikkurs in den zwei Wochen sein Bestes gab, sich etwas unter dem Begriff Unendlichkeit vorzustellen. Dazu erforschten wir die bereits erwarteten Bereiche Mathematik und Physik und lernten dabei auf eine von der Schule abweichende und bessere Art viel Neues und Aufregendes. Das Thema birgt so viele Facetten, dass sich beim Beantworten einer Frage zehn neue ergaben, wodurch unser Kurs nicht nur aus Rechnen und Rätseln, sondern auch aus Diskussionen, Besprechen und Austauschen bestand. Die äußerst spannende Exkursion nach Heidelberg war ein gelungener Einblick in die Welt der Wissenschaft.

Unsere Kurs-Atmosphäre war sehr angenehm, in den Pausen bastelten wir an unseren Sierpinski-Pyramiden, lösten Manas (Rätsel), designten unsere Kurs-T-Shirts, aßen Kekse und hatten sehr viel Spaß miteinander. Ausschnitte unserer lustigsten Momente sind in unserer Zitatesammlung nachlesbar. Wir empfanden die Zeit im Kurs als sehr angenehm und lehrreich. Wir sind überaus glücklich mit unserer Kurswahl und gehen zufrieden und mit neuen Denkweisen, neuem Wissen, Freunden und Erinnerungen zurück in unseren Alltag. Unendlichkeit – wir sind bereit!

Zitate

LAURA

- „Was sind natürliche Zahlen?“ – 28.08.24 (Charlotte)
- „Kocht man mit der Kochkurve den Romanescokohl?“ – 29.08.24 (Thorsten)
- „Was ist hot (H_0t)?“ – 01.09.24 (Lukas)
- „Schreibst du jetzt mit Kreide auf Papier?“ – (Silas)
- „Ja, klappt voll gut.“ – 01.09.24 (Anna Lena)
- „Uh, Peppa $\pi g!$ “ – 02.09.24 (Laura)
- „Was hat Spider-Man mit Unendlichkeit zu tun?“ – 05.09.24 (Joakim)
- „Silas ist der Kompetenz-Gott.“ – 05.09.24 (Leticia)
- „Ich will nur wissen, was 5^2 ist.“ – 11.10.24 (Ignatius)
- „Ich versteh, was du meinst, Felix! Ich weiß, was du sagen willst, Felix! Felix!“ – 11.10.24 (Ignatius, den's absolut nicht interessiert)
- „Reden wir mal über das Dönerbrot!“ – 11.10.24 (Charlotte bei der Gruppenarbeit)
- „3034, mein Löwe, mein Bär, mein Baby“ – 11.10.24 (Charlotte)
- „Sophisticatete Quantifizierung“ – 12.10.24 (Constantin)

Anhang: Romanescokohlrezept

CHATGPT UND CHARLOTTE G.

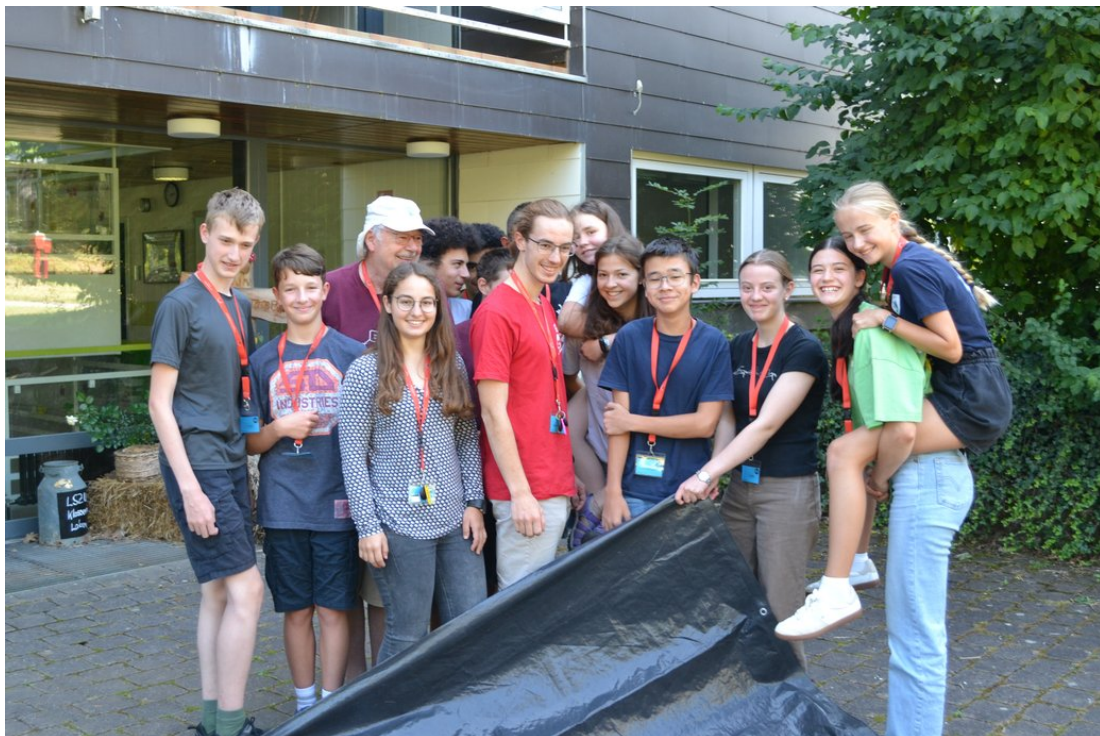
Rezept für die Zubereitung von Romanescokohl
(gekocht mit der Kochkurve)

Zutaten:

- 1 Kopf Romanescokohl
- Salz
- Wasser

Zubereitung:

1. Vorbereitung: Romanescokohl gründlich waschen und in Röschen teilen.
2. Kochen: Einen Topf mit Wasser füllen, salzen und zum Kochen bringen (Kochkurve optional). Die Romanescokohl-Röschen hinzufügen.
3. Garzeit: Den Kohl 5–7 Minuten kochen, bis er zart, aber noch bissfest ist.
4. Abgießen: Röschen in ein Sieb abgießen und kurz abtropfen lassen.
5. Servieren: Nach Belieben mit etwas Olivenöl, Zitronensaft oder Butter warm servieren, genießen und einen Vortrag über Fraktale halten.



Danksagung

Wir möchten uns an dieser Stelle bei denjenigen herzlich bedanken, die die 21. JuniorAkademie Adelsheim / Science Academy Baden-Württemberg überhaupt erst möglich gemacht und in besonderem Maße zu ihrem Gelingen beigetragen haben.

Finanziell wurde die Akademie in erster Linie durch die Dieter Schwarz Stiftung, die Vector Stiftung, die Hopp Foundation for Computer Literacy & Informatics und den Förderverein der Science Academy unterstützt. Dafür möchten wir allen Unterstützern ganz herzlich danken.

Die Science Academy Baden-Württemberg ist ein Projekt des Regierungspräsidiums Karlsruhe, das im Auftrag des Ministeriums für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg für Jugendliche aus dem ganzen Bundesland realisiert wird. Wir danken Frau Anja Bauer, Abteilungspräsidentin der Abteilung 7 „Schule und Bildung“ des Regierungspräsidiums Karlsruhe, der Leiterin des Referats 75 „Allgemein bildende Gymnasien“, Frau Leitende Regierungsschuldirektorin Dagmar Ruder-Aichelin, und Herrn Jan Wohlgemuth, Regierungsschuldirektor und Stellvertretender Leiter des Referats 35 „Allgemein bildende Gymnasien“ am Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg.

Koordiniert und unterstützt werden die JuniorAkademien von der Bildung & Begabung gGmbH in Bonn, hier gilt unser Dank der Leiterin des Bereichs Akademien Frau Dr. Ulrike Leikhof, der Referentin für die Deutschen JuniorAkademien und die Deutschen SchülerAkademien Dr. Dorothea Brandt sowie dem gesamten Team.

Wir waren wie immer zu Gast am Eckenberg-Gymnasium mit dem Landesschulzentrum für Umweltbildung (LSZU). Für die herzliche Atmosphäre und die idealen Bedingungen auf dem Campus möchten wir uns stellvertretend für alle Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter bei dem Schulleiter des Eckenberg-Gymnasiums Herrn Oberstudiendirektor Martin Klaißer sowie dem Leiter des LSZU Herrn Studiendirektor Christian Puschner besonders bedanken.

Ein herzliches Dankeschön geht auch an Frau Oberstudiendirektorin Dr. Andrea Merger, Leiterin des Hölderlin-Gymnasium in Heidelberg, und Herrn Oberstudiendirektor Stefan Ade, Leiter des Schwetzingen Hebel-Gymnasiums, wo wir bei vielfältiger Gelegenheit zu Gast sein durften.

Zuletzt sind aber auch die Leiterinnen und Leiter der Kurse und der kursübergreifenden Angebote gemeinsam mit dem Schülermentorenteam und der Assistenz des Leitungsteams diejenigen, die mit ihrer hingebungsvollen Arbeit das Fundament der Akademie bilden.

Diejenigen aber, die die Akademie in jedem Jahr einzigartig werden lassen und sie zum Leben erwecken, sind die Teilnehmerinnen und Teilnehmer. Deshalb möchten wir uns bei ihnen und ihren Eltern für ihr Engagement und Vertrauen ganz herzlich bedanken.

Bildnachweis

Seite 9, Abbildung Asteroid (Ausschnitt des Originalbildes):

NASA, <https://photojournal.jpl.nasa.gov/catalog/PIA00135>
NASA/JPL

Seite 9, Abbildung Meteor:

Wikimedia, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Meteor,_8.5.2016.jpg
Wikimedia-User Michael Eberth
CC BY-SA 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/legalcode>)

Seite 9, Abbildung Meteorit Knyahinya:

Wikimedia, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Steinmeteoriten_NHM_Wien.JPG
Wikimedia-User Dr. Bernd Gross
CC BY-SA 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/legalcode>)

Seite 12, Abbildung Kirkwood Gaps:

Wikimedia, <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:AsteroidIncAu.png>
Wikimedia-User Dreg743, Piotr Deuar
CC BY-SA 3.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/legalcode>)

Seite 12, Abbildung Mikrometeoriten unter dem Lichtmikroskop:

Wikimedia, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Light_microscope_images_of_stony_cosmic_spherules.png
Wikimedia-User Shaw Street
CC BY-SA 3.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/legalcode>)

Seite 13, Abbildung Genese von Mikrometeoriten:

urbane Mikrometeorite, <https://www.micrometeorites.org/einfuehrung>
Dr. Thilo Hasse, mit freundlicher Genehmigung

Seite 14, Abbildung Azimutsystem:

Wikimedia, <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:HorSys.svg>
Wikimedia-User S. Wetzel
CC BY-SA 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/legalcode>)

Seite 15, Abbildung Äquatorsystem:

Wikimedia, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Equatorial_coordinates.svg?lang=de
Wikimedia-User Cmglee
CC BY-SA 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/legalcode>)

Seite 17, Abbildung Funktion des großen Wagens als Polarsternzeiger:

Wikimedia, <https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:PolarsternFinden.svg>
Wikimedianutzer Flups

Der Urheber erteilte ein unentgeltliches, bedingungsloses Nutzungsrecht für jedermann ohne zeitliche, räumliche und inhaltliche Beschränkung (gemeinfrei-artige Nutzungslizenz).

Seite 23, Abbildung Ionentriebwerk:

NASA, <https://www.jpl.nasa.gov/images/pia04247-deep-space-1s-ion-engine>
NASA/JPL

Seite 25, Abbildung Messeinheit:

Wikimedia, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Apollo_IMU_at_Draper_Hack_the_Moon_exhibit.agr.jpg
Wikimedia-User ArnoldReinhold
CC BY-SA 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/legalcode>)

Seite 26, Abbildung Testflug Starship:

Wikimedia, [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:StarshipLaunch_\(crop_2-3\).jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:StarshipLaunch_(crop_2-3).jpg)
Wikimedianutzer Osunpokeh
CC BY-SA 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/legalcode>)

Seite 33, Kursbild:

Foto des Literatur/Philosophie-Kurses
Isabella Flick

- Seite 34, Utopiebegriff:
Darstellung der Utopiebegriffe
KI-generiert und vom Kurs bearbeitet
- Seite 35, Thomas Morus:
Bildnis des Thomas Morus, UB Leipzig
openverse, <https://openverse.org/image/a00ea616-6192-4377-91c4-60710389e7ff>
Als gemeinfrei gekennzeichnet
- Seite 36, Hermeneutische Spirale:
Darstellung der Hermeneutik als Methode
Laura Treptow
- Seite 37, Grundkonzept des Kursaufbaus:
Schaubild der grundlegenden Überlegungen zum Kursaufbau, angelehnt an ein Schaubild aus: Susann Vollert:
Utopien – nicht hier, nicht jetzt, nicht möglich?, Beitrag 33 aus: RAAbits Ethik/Philosophie Nr. 37, Raabe
Verlag, Dezember 2013.
- Seite 38, Kursarbeit:
Henriette Neuschwander
- Seite 39, Portrait von Hobbes, Künstler John Michael Wright, ca. 1670
Wikimedia, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Thomas_Hobbes_by_John_Michael_Wright.jpg
Als gemeinfrei gekennzeichnet
- Seite 41, George Orwell (1940)
Wikimedia, [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:George_Orwell,_c._1940_\(41928180381\).jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:George_Orwell,_c._1940_(41928180381).jpg)
Cassowary Colorizations
CC BY 2.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by/2.0/legalcode>)
- Seite 42, Vereinfachte Darstellung des idealen Staatsaufbaus nach Platons Idee des Philosophenkönigs
Antonia Schneider
- Seite 42, Platon:
Ausschnitt aus dem Fresko „Philosophenschule von Athen“, Künstler Raffael, ca 1510
Wikimedia, <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Platon.png>
Wikimedia-User RaphaelQS
CC BY-SA 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/legalcode>)
- Seite 43, Immanuel Kant:
Wikimedia, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kant_gemaelde_3.jpg
Johann Gottlieb Becker, 1768
Als gemeinfrei gekennzeichnet
- Seite 45, Bildnis des Gotthold Ephraim Lessing, UB Leipzig
openverse, <https://openverse.org/image/c311d14c-7e57-4b62-83b1-c0eb5bf45350>
Als gemeinfrei gekennzeichnet
- Seite 45, Die Ebenen der Ringparabel:
Schaubild der Text- und Bedeutungsebene von Lessings Ringparabel in seinem Werk „Nathan der Weise“
Letitia Bindert
- Seite 46, Hans Jonas an der Universität St. Gallen (1983):
Wikimedia, [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hans_Jonas_an_der_Universität_St._Gallen_\(1983\)_H_SGH_022-001945.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hans_Jonas_an_der_Universität_St._Gallen_(1983)_H_SGH_022-001945.jpg)
Universitätsarchiv St.Gallen, Regina Kühne, HSGH 022/001945
CC BY-SA 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/legalcode>)
- Seite 47, KI-generierte virtuelle Welt:
Beispielhafte Darstellung einer virtuellen Utopie, angelehnt an Beschreibungen aus dem Buch „Cryptos“ von
Ursula Poznanski
KI-generiert und vom Kurs bearbeitet
- Seite 48, Der voll digitalisierte Mensch:
Beispielhafte Darstellung eines „gläsernen“ Menschen in einer voll digitalisierten Welt
KI-generiert und vom Kurs bearbeitet
- Seite 49, Exkursion:
Foto des Kurses bei der „experimenta“ in Heilbronn
Nadia Serotek

Seite 50, Spaß beim Planendreihen:

Kursteilnehmer zwischen Arbeit und Vergnügen
Tobias Flick

Seite 52, Design des Kursshirts:

Gemeinsam im Kurs erstelltes Design für das Kurs-T-Shirt
KI-generiert und vom Kurs bearbeitet

Seite 111, Abbildung Ernährungspyramide:

Wikimedia, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Plakat_Ern%C3%A4hrungspyramide_7Stufen_ohne_Rand_cutted.png

Wikimedia-User Magnus Manske

CC BY-SA 3.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/legalcode>) Seite 119, Abbildung Temperaturverlauf in der Atmosphäre:

www.eskp.de/en/pollutants/forschungsthema-atmosphaere-935771/#images-1

Wissensplattform eskp.de

CC BY 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/legalcode>)

Seite 125, Abbildung Schematischer Aufbau der Erdatmosphäre:

Wikimedia, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Atmosphäre_Stufen.svg

Niko Lang, Wikimedia-User Ladyt

CC BY-SA 3.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/legalcode>)

Seite 126, Abbildung Lichtspektrum:

Wikipedia, <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:EM-Spektrum.svg>

Matthias Matt

CC BY-SA 3.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/legalcode>)

Seite 126, Abbildung Streuung des Sonnenlichts:

<https://www.leifiphysik.de/optik/farben/ausblick/himmelsblau-und-abendrot>

LEIFIPhysik – mit freundlicher Genehmigung

Seite 133, Abbildung: Vergleich mit Daten anderer Sonden

Dr. Tobias Kerzenmacher, Institut für Meteorologie und Klimaforschung, Atmosphärische Spurengase und Fernerkundung am KIT (Karlsruhe Institute of Technology), unter Verwendung der Daten von:

<https://doi.org/10.24381/cds.6860a573>

<https://www.ncei.noaa.gov/products/weather-balloon/integrated-global-radiosonde-archive>

Mit freundlicher Genehmigung

Alle anderen Abbildungen sind entweder gemeinfrei oder eigene Werke.

Bearbeitungen von Bildern unter einer CC-SA-Lizenz werden hiermit unter derselben Lizenz weitergegeben.

Abbildungen der Europäischen Weltraumagentur (ESA) werden gemäß der ESA Standard License für Bildungszwecke verwendet: https://www.esa.int/ESA_Multimedia/Copyright_Notice_Images

Abbildungen der National Aeronautics and Space Administration (NASA) können für Schulen und Lehrbücher ohne explizite Erlaubnis verwendet werden: <https://www.nasa.gov/multimedia/guidelines/index.html>